

Eine funktionalanalytische Theorie
der linearen Diskretisierungsalgorithmen für
Anfangswertprobleme gewöhnlicher
Differentialgleichungen

DISSERTATION

zur Erlangung des Grades eines
Doktors der Naturwissenschaften
der

Abteilung für Mathematik
an der Ruhr-Universität Bochum

von

Walter Schempp
aus Tübingen

Bochum 1968

Digitized by the Internet Archive
in 2026

Eine funktionalanalytische Theorie
der linearen Diskretisierungsalgorithmen für
Anfangswertprobleme gewöhnlicher
Differentialgleichungen

DISSERTATION

zur Erlangung des Grades eines
Doktors der Naturwissenschaften
der

Abteilung für Mathematik
an der Ruhr-Universität Bochum

von

Walter Schempp
aus Tübingen

Bochum 1968

Dissertation eingereicht am 29. 4. 1968

Tag der mündlichen Prüfung: 14. 10. 1968

Dekan: Prof. Dr. G. Ewald

Referent: Prof. Dr. H. Ehlich

Korreferent: Prof. Dr. K. Zeller

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	1
Kapitel I. - Distributionentheoretische Grundlagen	4
§ 1: Einige Funktionen- und Distributionen- räume	6
§ 2: Distributionen mit diskretem Träger	14
Kapitel II. - Theorie der linearen Diskretisierungs- algorithmen für Anfangswertprobleme gewöhnlicher Differentialgleichungen	35
§ 3: Räume von DAHLQUIST-Distributionen	39
§ 4: Stationäre Punktprozesse	66
§ 5: Numerische Stabilität	92
§ 6: Konvergenzuntersuchungen	118
Literaturverzeichnis	133
Register einiger wichtiger Strukturen	138



Einleitung

In neuerer Zeit sind von einer Reihe verschiedener Autoren, in Deutschland mit besonderem Nachdruck namentlich von L. COLLATZ und seiner Schule, gewisse Zusammenhänge zwischen numerischer Mathematik und Funktionalanalysis hervorgehoben worden. S.L. SOBOLEV, einer der Wegbereiter der Distributionentheorie, hat in seiner Note [29] sogar die Meinung vertreten, die Numerik sei eine Teildisziplin der Funktionalanalysis. Weil sich natürlich weder die numerische Analysis noch die Funktionalanalysis vollständig scharf und allgemeingültig abgrenzen lassen, ist diese Ansicht mit Sicherheit anfechtbar. Falls jedoch überhaupt Berührungspunkte zwischen den beiden genannten Disziplinen vorhanden sind, so werden diese, außer in der allgemeinen Approximationstheorie, innerhalb der Theorie der linearen Approximationsmethoden für gewöhnliche und partielle Differentialgleichungen sichtbar.

In den Originalarbeiten des Begründers der allgemeinen Theorie der Diskretisierungsalgorithmen für

Anfangswertprobleme gewöhnlicher Differentialgleichungen, G. DAHLQUIST [8], [9], fehlt noch jeder Hinweis auf den weitgehend linearen Charakter seiner Theorie; DAHLQUIST stützt sich in erster Linie auf Hilfsmittel aus der Funktionentheorie einer komplexen Variablen. Gewisse verborgene Ansätze zur Erkennung der linearen Charakterzüge finden sich später dann zwar bei P. HENRICI [13], [14] und bei M. REIMER [21], [22], [23], sie werden jedoch dort nicht weiter verfolgt. Der Grund ist wohl darin zu suchen, daß sich beide Autoren prinzipiell auf rein klassische Methoden beschränken. In der vorliegenden Arbeit wird der Versuch unternommen, Teile der allgemeinen Theorie der Diskretisierungsalgorithmen für Anfangswertprobleme gewöhnlicher Differentialgleichungen in den Rahmen der Funktionalanalysis zu stellen und insbesondere gewisse ihrer linearen Aspekte genauer herauszuarbeiten. Dabei wird sich besonders die Theorie der Distributionen im Sinne von L. SCHWARTZ [27] als das angemessene Werkzeug erweisen.

Die Arbeit gliedert sich in zwei Teile. Kapitel I befaßt sich mit der Bereitstellung der distributionentheoretischen Hilfsmittel, welche für den hier eingenommenen funktionalanalytischen Standpunkt von

grundlegender Bedeutung sind. Kapitel II ist der eigentlichen Theorie der linearen Diskretisierungsalgorithmen für Anfangswertprobleme gewöhnlicher Differentialgleichungen gewidmet. Grob umrissen führt dieses, auf den Ergebnissen des Kapitels I basierend, von einer exakten Definition des Begriffs der linearen Diskretisierung über die Einführung und die nähere Untersuchung von Räumen sog. DAHLQUIST-Distributionen weiter zu neuen Definitionen und Begründungen verschiedener numerischer Stabilitätsbegriffe und Stabilitätskriterien und schließlich zu Untersuchungen über die Konvergenz der durch Anwendung der linearen Diskretisierungsalgorithmen erzielten Näherungslösung. Zur genaueren Information vergleiche man die Zusammenfassungen, welche zu Beginn jedes der beiden Kapitel gegeben werden.

In der Terminologie und der Bezeichnungsweise lehnen wir uns - was Mengenlehre, lineare Algebra, allgemeine Topologie, Theorie der topologischen Vektorräume und funktionalanalytische Integrationstheorie betrifft - in weitem Umfang an N. BOURBAKI [1], [2], [3], [4], [5] an, ohne daß darauf in jedem einzelnen Fall immer hingewiesen werden soll.

Kapitel I. - Distributionentheoretische Grundlagen

Wie bereits in der Einleitung betont, spielt in unseren Untersuchungen der linearen Diskretisierungsalgorithmen für Anfangswertprobleme gewöhnlicher Differentialgleichungen die Theorie der Distributionen von LAURENT SCHWARTZ eine wichtige Rolle. Wir setzen im folgenden die wesentlichen Begriffsbildungen und Ergebnisse dieser Theorie und ebenso die des Fundaments, auf das sie sich gründet, die allgemeine Theorie der topologischen Vektorräume, als bekannt voraus und verweisen dazu auf die umfassende, auch heute noch maßgebende Monographie von L. SCHWARTZ [27] bzw. auf die Darstellung von N. BOURBAKI [4].

Lediglich aus Gründen der Bezeichnungsnormierung und zur Festlegung der benützten Terminologie geben wir in § 1 eine gedrängte Zusammenstellung der später wiederholt heranzuziehenden lokalkonvexen topologischen Funktionen - Vektorräume, der sog. Grundräume der Distributionentheorie, und ihrer zugehörenden topologischen Dualen, der verschiedenen Distributionen - bzw. (funktionalanalytischen) Maßräume. Zugleich wird dabei, um

eine rasche Orientierung zu gewährleisten, der Versuch unternommen, möglichst übersichtlich die gegenseitige "Lage" der verschiedenen Grundräume bzw. Distributionenräume zueinander - sowohl in algebraischer wie in topologischer Hinsicht - darzulegen. Denn gerade die simultane Behandlung und der "Vergleich" verschiedener Vektorräume, denen verschiedenartige, mit ihrer Struktur verträgliche Topologien aufgeprägt sind, bildet ja das eigentliche Charakteristikum der Theorie der topologischen Vektorräume. Dieses ist deshalb auch für ihre Teildisziplin, die Distributionentheorie, von entscheidender Bedeutung. Allerdings konnten dieser Zusammenstellung keinerlei Beweise, ja nicht einmal kurze Beweisskizzen beigelegt werden.

§ 2 befaßt sich mit der Charakterisierung der komplexen Distributionen mit diskretem Träger, an die sich, speziell für den eindimensionalen Fall, in den Sätzen 2-2 und 2-3 Kennzeichnungen der Distributionen mit endlichem Träger anschließen. Die entsprechenden Überlegungen scheinen in der Literatur bislang nicht niedergelegt worden zu sein. Die Hervorhebung von Distributionen gerade mit der zuletzt genannten Eigenschaft wird durch die Tatsache gerechtfertigt, daß uns diese in Kapitel II, § 3 zum Begriff der DAHLQUIST-Distribution führen werden.

§ 1: Einige Funktionen- und Distributionenräume

1.1. Im folgenden bedeutet μ das LEBESGUE-Maß auf dem n -dimensionalen reellen euklidischen Raum $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 1$, ganz), und Ω eine nichtleere offene, also μ -meßbare Teilmenge des $\mathbb{R}^n$. Hinsichtlich der induzierten Relativtopologie ist Ω ein im Unendlichen abzählbarer, lokalkompakter topologischer Raum. Dies bedeutet, daß sich Ω homöomorph in einen durch Adjunktion genau eines Punktes $\{\infty\}$ als idealen Rand gewonnenen kompakten topologischen Raum, die ALEXANDROFFsche Einpunktkompaktifizierung $\Omega' = \Omega \cup \{\infty\}$ von Ω , einbetten läßt, wobei der Umgebungsfiler von ∞ eine abzählbare Basis besitzt.

Zunächst wenden wir uns einigen Grundräumen der Distributionentheorie auf Ω zu. Wir bezeichnen mit $\mathcal{E}_c(\Omega) = \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ den Vektorraum über dem Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen, welcher aus allen auf der offenen Menge Ω definierten, dort unendlich oft differenzierbaren, komplexwertigen Funktionen besteht. Falls $m \geq 0$ eine beliebige, aber fest gewählte natürliche Zahl bedeutet, bezeichnen wir mit $\mathcal{E}_c^m(\Omega) = \mathcal{C}^m(\Omega)$ entsprechend den $\mathbb{C}$ -Vektorraum der auf Ω m-fach stetig differenzierbaren, komplexwertigen Funktionen.

Die Topologie der gleichmäßigen Konvergenz für die Funktionen und allen ihren Ableitungen [der Ordnung $\leq m$] auf den kompakten Teilmengen von Ω ist mit der Vektorraum-Struktur von $\mathcal{E}_{\mathbb{C}}(\Omega)$ [bzw. von $\mathcal{E}_{\mathbb{C}}^m(\Omega)$] verträglich, denn diese wird ja durch das Spektrum von Halbnormen $\{p_{k,\kappa} \mid k \in \mathbf{N}, \Omega \supseteq K \text{ kompakt}\}$ [bzw. durch das Spektrum $\{p_{m,\kappa} \mid \Omega \supseteq K \text{ kompakt}\}$], welche gemäß

$$p_{k,\kappa} : f \longmapsto \sup_{|p| \leq k} \sup_{t \in K} |\partial^p f(t)|$$

definiert sind, (wobei $p = (p_1, \dots, p_n) \in \mathbf{N}^n$ einen beliebigen Multiindex der Länge $|p| = \sum_{j=1}^n p_j$ bezeichnet), induziert. Hinsichtlich dieser natürlichen lokalkonvexen Vektorraum-Topologien bilden $\mathcal{E}_{\mathbb{C}}(\Omega)$ und $\mathcal{E}_{\mathbb{C}}^m(\Omega)$ komplexe FRÉCHET-Räume.

Wir bezeichnen ferner wie üblich mit $\mathcal{D}_{\mathbb{C}}(\Omega) = \mathcal{D}_0^{\infty}(\Omega)$ den Testraum der komplexen Distributionen auf Ω , also denjenigen Vektorraum über dem Körper $\mathbb{C}$, welcher aus allen auf der offenen Menge Ω definierten und dort unendlich oft differenzierbaren komplexwertigen Funktionen mit kompaktem Träger besteht und dem die Standardtopologie von L. SCHWARTZ [27; Chap. III, § 1] aufgeprägt ist. Man versteht unter der letzteren die bekannte, als strikter induktiver Limes über ein zu

einer kompakten κ_0 - Ausschöpfung von Ω konstruiertes, abzählbares Spektrum von FRÉCHET-MONTEL-Topologien gewonnene, vollständige, separierte, lokalkonvexe, jedoch nicht metrisierbare Vektorraum-Topologie. Diese wird wohl auch als die kanonische (LF)-Topologie von $\mathfrak{D}_c(\Omega)$ bezeichnet. Weil die MONTEL-Eigenschaft strikt induktive Limites über abzählbare Spektren respektiert, ist $\mathfrak{D}_c(\Omega)$ hinsichtlich der kanonischen (LF)-Topologie ein komplexer MONTEL-Raum.

Fordert man von den komplexwertigen Testfunktionen auf der Menge Ω - außer der Kompaktheit ihrer Träger - lediglich die Existenz und Stetigkeit ihrer partiellen Ableitungen der Ordnung $\leq m$ in ganz Ω , so gewinnt man aufgrund einer ganz analogen Konstruktion mit Hilfe eines abzählbaren strikten Induktivspektrums von komplexen BANACH-Räumen den vollständigen hausdorffschen lokalkonvexen topologischen Vektorraum

$$\mathfrak{D}_c^m(\Omega) = \mathcal{L}_c^m(\Omega) .$$

Schließlich bezeichnen wir noch mit $\mathfrak{B}_c^\circ(\Omega)$ den mit der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz in Ω versehenen $\mathbb{C}$ -Vektorraum aller auf der Einpunktkompaktifizierung Ω' von Ω stetigen komplexwertigen Funktionen, welche auf dem idealen Rand $\{\infty\}$ von Ω' verschwinden. Die Vektorraum-Topologie von $\mathfrak{B}_c^\circ(\Omega)$

wird durch die Norm

$$\mathfrak{B}_C^\circ(\Omega) \ni f \mapsto \|f\| = \sup_{t \in \Omega} |f(t)|$$

induziert. Hinsichtlich dieser ist $\mathfrak{B}_C^\circ(\Omega)$ ein komplexer BANACH-Raum, nämlich gerade die vollständige Hülle des Vektorraumes $\mathfrak{D}_C^\circ(\Omega)$ in bezug auf die der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz in Ω kanonisch zugeordnete uniforme Struktur.

Beachtet man, daß die vom lokalkonvexen topologischen Vektorraum $\mathfrak{E}_C(\Omega)$ [bzw. $\mathfrak{E}_C^\infty(\Omega)$] auf seinem Untervektorraum $\mathfrak{D}_C(\Omega)$ [bzw. $\mathfrak{D}_C^\infty(\Omega)$] induzierte Relativtopologie größer ist als die kanonische (LF)-Topologie von $\mathfrak{D}_C(\Omega)$ [bzw. von $\mathfrak{D}_C^\infty(\Omega)$] und entsprechend auch die vom BANACH-Raum $\mathfrak{B}_C^\circ(\Omega)$ auf seinem Untervektorraum $\mathfrak{D}_C^\circ(\Omega)$ induzierte Topologie der gleichmäßigen Konvergenz in Ω größer ist als die Standard-(LF)-Topologie von $\mathfrak{D}_C^\circ(\Omega)$, so erhält man in der Kategorie LCTVS der lokalkonvexen topologischen Vektorräume über dem Körper $\mathbf{C}$ mit den stetigen $\mathbf{C}$ -linearen Abbildungen als Morphismen das nachstehende kommutative Diagramm von Grundräumen. In diesem sind sämtliche auftretende Morphismen stetige kanonische Monomorphismen hinsichtlich

der Ausgangstopologien der Objekte.

$$(1.1) \quad \begin{array}{ccccc} \mathcal{E}_c(\Omega) & \longrightarrow & \mathcal{E}_c^m(\Omega) & \longrightarrow & \mathcal{E}_c^o(\Omega) \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ \mathcal{D}_c(\Omega) & \longrightarrow & \mathcal{D}_c^m(\Omega) & \longrightarrow & \mathcal{D}_c^o(\Omega) \end{array} \quad \begin{array}{c} \searrow \\ \nearrow \end{array} \mathcal{B}_c^o(\Omega) \quad (m \in \mathbb{N})$$

1.2. Es seien zwei beliebige Objekte E und F aus der Kategorie $LCTVS$ gewählt und es sei $v : E \longrightarrow F$

irgendein Morphismus. Bildet man die zu E und F gehörenden topologischen Duale E' und F' und versieht diese mit den starken Topologien $\beta(E', E)$ bzw.

$\beta(F', F)$, so ist die zu v transponierte lineare Abbildung ${}^t v : (F'; \beta(F', F)) \longrightarrow (E'; \beta(E', E))$ ebenfalls wieder stetig, so daß durch $E \longmapsto (E'; \beta(E', E))$,

$v \longmapsto {}^t v$ ein kontravarianter Funktor auf der Kategorie $LCTVS$ definiert wird. Aus diesem Grunde erhält man durch Anwendung dieses Funktors auf das Diagramm (1.1), d.h. also durch Übergang zu den zugehörenden topologischen Dualen, welche mit den angemessenen starken Vektorraum-Topologien zu versehen sind, das folgende kommutative Diagramm:

$$(1.2) \quad \begin{array}{ccccc} \mathcal{E}'_c(\Omega) & \longleftarrow & \mathcal{E}'_c^m(\Omega) & \longleftarrow & \mathcal{M}_c^c(\Omega) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{D}'_c(\Omega) & \longleftarrow & \mathcal{D}'_c^m(\Omega) & \longleftarrow & \mathcal{M}_c(\Omega) \end{array} \quad \begin{array}{c} \searrow \\ \nearrow \end{array} \mathcal{M}_c^4(\Omega) \quad (m \in \mathbb{N})$$

Weil sämtliche im Ausgangsdiagramm (1.1) auftretenden Morphismen überall dicht liegende Bildräume besitzen, sind die Morphismen des dualen Diagramms (1.2) stark stetige Monomorphismen, also ebenfalls wieder lineare Einbettungsabbildungen. Es bleibt nur noch die Interpretation der im Diagramm (1.2) vorkommenden Objekte aus der Kategorie LCTVS übrig: $\mathfrak{D}'_{\mathbb{C}}(\Omega)$ ist der $\mathbb{C}$ -Vektorraum der komplexen Distributionen,

$\mathfrak{D}^m_{\mathbb{C}}(\Omega)$ der komplexen Distributionen der Ordnung $\leq m$,
 $\mathcal{M}_{\mathbb{C}}(\Omega) = \mathfrak{D}'^0_{\mathbb{C}}(\Omega)$ der komplexen RADON-Maße und
 $\mathcal{M}'_{\mathbb{C}}(\Omega) = \mathfrak{B}_{\mathbb{C}}(\Omega)$ der beschränkten komplexen RADON-Maße auf der vorgegebenen offenen Menge Ω . Die starke Topologie $\beta(\mathcal{M}'_{\mathbb{C}}(\Omega), \mathfrak{B}_{\mathbb{C}}(\Omega))$ des $\mathbb{C}$ -Vektorraumes $\mathcal{M}'_{\mathbb{C}}(\Omega)$ wird durch die (einzelne) Norm

$$\mathcal{M}'_{\mathbb{C}}(\Omega) \ni \lambda \longmapsto \|\lambda\|_{\beta} = \sup_{\substack{\|f\| \leq 1 \\ f \in \mathfrak{D}'^0_{\mathbb{C}}(\Omega)}} |\langle f, \lambda \rangle|$$

induziert. Hinsichtlich dieser ist $\mathcal{M}'_{\mathbb{C}}(\Omega)$ ein komplexer BANACH-Raum. Ferner kommen im Diagramm (1.2) als Objekte die $\mathbb{C}$ -Vektorräume $\mathfrak{E}'_{\mathbb{C}}(\Omega)$ der komplexen Distributionen mit kompaktem Träger, $\mathfrak{E}^m_{\mathbb{C}}(\Omega)$ der komplexen Distributionen der Ordnung $\leq m$ mit kompaktem Träger und $\mathcal{M}^c_{\mathbb{C}}(\Omega) = \mathfrak{E}'^0_{\mathbb{C}}(\Omega)$ der komplexen RADON-Maße mit kompaktem Träger auf der offenen Menge Ω vor und es bestehen die Beziehungen

$$(1.3) \quad \mathcal{E}'_c(\Omega) = \mathcal{E}'_c(\Omega) \cap \mathcal{D}'_c(\Omega), \quad \mathcal{M}_c(\Omega) = \mathcal{E}'_c(\Omega) \cap \mathcal{M}_c(\Omega).$$

Es ist noch wichtig anzumerken, daß jede Äquivalenzklasse $\hat{f}$ des Quotientenvektorraumes $L^1_{loc}(\Omega, \mu; \mathbb{C}) = \mathcal{L}^1_{loc}(\Omega, \mu; \mathbb{C}) / \text{mod } (\mu - \text{fast überall auf } \Omega)$ auf Ω lokal μ -integrierbarer komplexwertiger Funktionen mit dem RADON-Maß $f \cdot \mu$ auf Ω der Dichte $f \in \hat{f}$ in bezug auf μ identifiziert und somit als eine komplexe Distribution (o-ter Ordnung) auf Ω aufgefaßt werden kann. Die injektive lineare Einbettungsabbildung $\hat{f} \mapsto f \cdot \mu$, wobei f einen beliebigen Repräsentanten der Äquivalenzklasse $\hat{f}$ bezeichnet, des $\mathbb{C}$ -Vektorraumes $L^1_{loc}(\Omega, \mu; \mathbb{C})$ in den Distributionenraum $\mathcal{D}'_c(\Omega) = \mathcal{M}_c(\Omega)$, ist insofern kanonisch, als das LEBESGUE-Maß μ das (bis auf einen konstanten Faktor eindeutig bestimmte) HAAR-Maß der additiven abelschen lokalkompakten topologischen Gruppe $\mathbb{R}^n$ ist.

1.3. Legt man an Stelle des Körpers $\mathbb{C}$ jetzt den reellen Zahlkörper $\mathbb{R}$ als Grundkörper zu Grunde, so kann der reelle Vektorraum $\mathcal{D}'_{\mathbb{R}}(\Omega)$ der auf Ω stetigen reellwertigen Funktionen mit kompaktem Träger mit der vom kanonisch geordneten Produktvektorraum $\mathbb{R}^{\Omega}$ induzierten natürlichen Ordnungsstruktur versehen werden. Hinsichtlich dieser Ordnung und der kanonischen

(LF)-Topologie, die beide miteinander verträglich sind, bildet $\mathfrak{D}_{\mathbb{R}}^{\circ}(\Omega)$ einen lokalkonvexen topologischen Vektorverband. Den spitzen konvexen Dualkegel des abgeschlossenen Ordnungskegels von $\mathfrak{D}_{\mathbb{R}}^{\circ}(\Omega)$ im $\mathbb{R}$ -Vektorraum $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}(\Omega) = \mathfrak{D}_{\mathbb{R}}^{\circ}(\Omega)$ der reellen RADON-Maße auf Ω bezeichnen wir mit $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}(\Omega)_{+}$. Dieser definiert, als Ordnungskegel betrachtet, die kanonische Ordnung von $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}(\Omega)$: die Elemente von $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}(\Omega)_{+}$ sind genau die positiven reellen RADON-Maße auf der offenen Menge Ω . Wir setzen $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}^{\dagger}(\Omega)_{+} = \mathcal{M}_{\mathbb{R}}^{\dagger}(\Omega) \cap \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(\Omega)_{+}$ und benutzen die entsprechende Bezeichnungsweise für den die kanonische Spurordnung definierenden Ordnungskegel auch bei anderen Untervektorräumen von $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}(\Omega)$.

§ 2: Distributionen mit diskretem Träger

2.1. Wie in § 1 bedeute wieder Ω eine nichtleere offene Teilmenge des n -dimensionalen reellen euklidischen Raumes $\mathbb{R}^n$, zu der wir den mit seiner kanonischen (LF)-Topologie ausgestatteten komplexen Testraum $\mathcal{D}_c(\Omega)$ sowie seinen topologischen Dual, den $\mathbb{C}$ -Vektorraum $\mathcal{D}'_c(\Omega)$ der komplexen Distributionen auf Ω , konstruieren. Die zur topologischen Dualität $(\mathcal{D}_c(\Omega), \mathcal{D}'_c(\Omega))$ gehörende kanonische Bilinearform auf dem Produktvektorraum $\mathcal{D}_c(\Omega) \times \mathcal{D}'_c(\Omega)$, also das "Skalarprodukt" der Dualität $(\mathcal{D}_c(\Omega), \mathcal{D}'_c(\Omega))$, bezeichnen wir im folgenden stets mit $(\varphi, T) \longmapsto \langle \varphi, T \rangle$ und die durch diese Dualität zwischen $\mathcal{D}_c(\Omega)$ und $\mathcal{D}'_c(\Omega)$ auf dem Vektorraum $\mathcal{D}'_c(\Omega)$ hervorgerufene schwache Topologie mit $\sigma(\mathcal{D}'_c(\Omega), \mathcal{D}_c(\Omega))$. Ist $t \in \Omega$ ein beliebig vorgegebener Punkt, so soll $\varepsilon_{\{t\}} \in \mathcal{M}_c^c(\Omega)$ stets das von der Menge $\{t\}$ getragene DIRAC-Maß auf Ω bedeuten; für die im Nullpunkt konzentrierte Einheitsmasse $\varepsilon_{\{0\}}$, schreiben wir der Kürze halber nur ε .

Unser erstes Ziel ist eine Charakterisierung der skalarwertigen Distributionen auf Ω mit diskretem Träger. Mit Hilfe einer topologischen Verklebung von

Distributionskeimen beweisen wir hierzu den folgenden

Satz 2-1: Es bezeichne M eine nichtleere, abgeschlossene und diskrete Teilmenge von $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ und $t \mapsto p_t(X)$ eine Abbildung der offenen Menge Ω in die komplexe Algebra $\mathbb{C}[X] = \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$ der Polynome in den n Unbestimmten $X = (X_1, \dots, X_n)$ mit Koeffizienten aus dem Körper $\mathbb{C}$, welche jedem Punkt $t \in \bigcup_{\Omega} M$ das Nullpolynom und den Punkten t aus der Menge M ein Polynom $p_t(X) \neq 0$ zuordnet (so daß also genau M der Träger der Familie $\{p_t(X) \in \mathbb{C}[X] \mid t \in \Omega\}$ von Polynomen ist). Dann wird in dem separierten lokalkonvexen topologischen $\mathbb{C}$ -Vektorraum $(\mathcal{D}'(\Omega), \sigma(\mathcal{D}'(\Omega), \mathcal{D}(\Omega)))$ mit Hilfe der Familie $\{p_t(\partial) = p_t(\partial_1, \dots, \partial_n) \mid t \in \Omega\}$ von Differentialpolynomen durch

$$(2.1) \quad T = \sum_{t \in \Omega} p_t(\partial) \cdot \varepsilon_{\{t\}}$$

eine komplexe Distribution auf Ω definiert mit dem Träger $\text{Supp}(T) = M$. Umgekehrt läßt sich jede auf Ω definierte, komplexe Distribution T mit dem diskreten Träger M in der Form (2.1) darstellen; diese Darstellung ist eindeutig.

Beweis: (i) Vorab ist zu bemerken, daß die auf der rechten Seite in Gleichung (2.1) auftretende Summe

hinsichtlich der schwachen Topologie $\sigma(\mathcal{D}'(\Omega), \mathcal{D}_c(\Omega))$ des Distributionenraumes $\mathcal{D}'_c(\Omega)$ konvergiert, denn für jede vorgegebene Testfunktion $\varphi \in \mathcal{D}_c(\Omega)$ treten ja in $\langle \varphi, T \rangle$ nur endlich viele nicht verschwindende Summanden auf. Man vergleiche zur Frage der Summierbarkeit der Distributionenfamilie $\{p_t(\varphi) \cdot \epsilon_{\{t\}}\}_{t \in \Omega}$ im Raum $\mathcal{D}'_c(\Omega)$ auch die nachstehende Anmerkung (i).

(ii) Wir verifizieren zunächst die Inklusion

$\bigcup_{\Omega} M \subseteq \bigcup_{\Omega} \text{Supp}(T)$. Wegen der vorausgesetzten Abgeschlossenheit der Menge M in Ω existiert zu jedem Punkt $t \in \bigcup_{\Omega} M$ eine offene Umgebung U_t von t in Ω mit der Eigenschaft $U_t \cap M = \emptyset$. Für jede Testfunktion $\varphi \in \mathcal{D}_c(\Omega)$, deren Träger in der offenen Menge U_t enthalten ist, gilt dann $\langle \varphi, T \rangle = 0$. Demnach ist für die Einschränkung der Distribution T auf U_t sicher $T|_{U_t} = \text{rest}_{U_t}(T) = 0$ gültig, woraus $t \in \bigcup_{\Omega} \text{Supp}(T)$ hervorgeht.

Es ist weiter die konverse Inklusion $M \subseteq \text{Supp}(T)$ nachzuweisen. Zu jedem Punkt $t \in M$ und zu jeder vorgegebenen Umgebung U_t von t in Ω existiert stets, weil ja die einpunktige Menge $\{t\}$ hinsichtlich der vom topologischen Raum Ω auf der Teilmenge M induzierten diskreten Topologie offen ist, eine offene Umgebung V_t von t in Ω mit den Eigenschaften $V_t \subseteq U_t$ und $V_t \cap M = \{t\}$; die letzte Gleichung zeigt eben gerade,

daß t ein isolierter Punkt der Menge M ist. Der Umgebungsfiler des Punktes t im lokalkompakten topologischen Raum Ω besitzt eine Basis aus lauter kompakten Umgebungen. Deshalb können wir von V_t zusätzlich noch annehmen, daß es sich um eine relativ kompakte Umgebung des Punktes t in Ω handelt, zu der sich wiederum eine kompakte Umgebung K_t von t in Ω wählen läßt mit der Eigenschaft $K_t \subseteq V_t$. Mithin ist durch die Familie $\{V_t, \bigcup_{\Omega} K_t\}$ eine offene Überdeckung der Menge Ω gegeben. Bekanntlich (vgl. L. SCHWARTZ [27; Chap. I, § 2]) läßt sich zu dieser Überdeckung eine untergeordnete (lokal-endliche) unendlich oft differenzierbare Partition der Einheit $\{\varphi, \tilde{\varphi}\}$ auf Ω konstruieren. Für die auf Ω positiven reellen Funktionen φ und $\tilde{\varphi}$ gilt dann

$$\text{Supp}(\varphi) \subseteq V_t, \text{Supp}(\tilde{\varphi}) \subseteq \bigcup_{\Omega} K_t$$

und auf ganz Ω die Gleichung

$$\varphi + \tilde{\varphi} = 1.$$

Insbesondere besitzt also nach den über die Umgebung V_t getroffenen Voraussetzungen die nach allen n Koordinaten $(s_1, \dots, s_n)$ partiell beliebig oft stetig differenzierbare Funktion φ einen kompakten

Träger in Ω , was $\varphi \in \mathcal{D}_c(\Omega)$ nach sich zieht, und es gilt für ihre Einschränkung $\varphi|_{K_+} = 1$. Wir setzen φ einfach dadurch von der Menge Ω aus auf den ganzen Raum $\mathbb{R}^n$ zu einer Testfunktion fort, daß wir jedem Punkt des Komplements $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$ den Wert 0 zuordnen. Die auf diese Weise durch sog. natürliche Fortsetzung gewonnene Funktion aus dem Testraum

$\mathcal{D}_c(\mathbb{R}^n)$ soll im folgenden ebenfalls wieder mit $(s_1, \dots, s_n) \mapsto \varphi(s_1, \dots, s_n)$ bezeichnet werden und für $1 \leq i \leq n$ mit $\varphi_i : s_i \mapsto \varphi(s_1, \dots, s_i, \dots, s_n)$ ihre zugehörenden, auf der reellen Zahlengeraden $\mathbb{R}$ unendlich oft stetig differenzierbaren, partiellen Funktionen mit kompaktem Träger.

Es sei nun ein Multiindex $p = (p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{N}^n$ mit der Eigenschaft gewählt, daß seine Länge $|p| = \sum_{i=1}^n p_i \geq 0$ mit dem niedrigsten Grad der in der (eindeutigen) direkten Summendarstellung des vorgegebenen Polynoms $p_i(X) \in \mathbb{C}[X]$ vom Gesamtgrad ≥ 0 auftretenden Monome übereinstimmt. Wir können o.B.d.A. weiter noch annehmen, daß im Monom $m_p(X) = \alpha_p X^p = \alpha_{p_1, \dots, p_n} X_1^{p_1} \dots X_n^{p_n} \in \mathbb{C}[X]$ - homogenes Element vom Grad $|p|$ in der kanonisch $\mathbb{N}$ -graduierten $\mathbb{C}$ -Algebra $\mathbb{C}[X]$ - der Koeffizient $\alpha_p = \alpha_{p_1, \dots, p_n} \in \mathbb{C}$ nicht verschwindet, daß also $m_p(X)$ ein Basis-Element von $\mathbb{C}[X]$ ist. Wir bezeichnen dann mit $(s_1, \dots, s_n) \mapsto \psi(s_1, \dots, s_n)$ diejenige Funktion auf

dem Raum $\mathcal{R}^n$, welche für $1 \leq i \leq n$ aus $\varphi \in \mathcal{D}_c(\mathcal{R}^n)$ durch genau p_i -malige Integration der stetigen Funktion $\xi \mapsto \varphi_i(\xi)$ mit kompaktem Träger in $\mathcal{R}$ über das abgeschlossene Intervall $]-\infty, s_i] \subset \mathcal{R}$ entsteht. Die partiellen Ableitungen beliebiger Ordnung der Funktion $(s_1, \dots, s_n) \mapsto \psi(s_1, \dots, s_n)$ nach allen n Koordinaten existieren und sind stetig auf dem ganzen Raum $\mathcal{R}^n$, d.h. es gilt $\psi \in \mathcal{E}_c(\mathcal{R}^n)$. Ist nun aber $\tilde{m}(X) \in \mathbb{C}[X]$ ein beliebiges, vom bislang betrachteten Monom $m_p(X)$ verschiedenes Monom vom Grad $\geq |p|$, so gilt auf dem offenen Kern von K_t in Ω sicher $\tilde{m}(\partial) \cdot \psi|_{K_t} = 0$, denn laut Konstruktion stimmt ja die auf K_t eingeschränkte Funktion $\varphi|_{K_t}$ auf der ganzen kompakten Umgebung K_t des Punktes t in Ω mit der konstanten Funktion $s \mapsto 1$ überein. Demnach erhält man insbesondere, weil ja der Gesamtgrad des Polynoms $p_t(X)$ nach Voraussetzung $\geq |p|$ ist, für das zugehörige Differentialpolynom $p_t(\partial)$, angewandt auf die Funktion $\psi \in \mathcal{E}_c(\mathcal{R}^n)$,

$$(2.2) \quad \langle p_t(\partial) \cdot \psi, \varepsilon_{(t)} \rangle = \langle m_p(\partial) \cdot \psi, \varepsilon_{(t)} \rangle = \alpha_p \cdot \varphi(t) = \alpha_p.$$

Bezeichnet man mit ω die Einschränkung auf die offene Menge Ω der auf dem ganzen Raum $\mathcal{R}^n$ beliebig oft stetig differenzierbaren Funktion $\varphi \cdot \psi: s \mapsto \varphi(s) \cdot \psi(s)$ mit kompaktem Träger in Ω , so gilt $\omega \in \mathcal{D}_c(\Omega)$

und $\text{Supp}(\omega) \subseteq \text{Supp}(\varphi) \subseteq V_t \subseteq U_t$. Anwendung der verallgemeinerten LEIBNIZ-Regel auf die Testfunktion ω in Ω liefert die Gleichung

$$(2.3) \quad \langle p_t(\partial) \cdot \omega, \varepsilon_{ct} \rangle = \langle p_t(\partial) \cdot \varphi, \varepsilon_{ct} \rangle.$$

Der zum vorgegebenen Differentialpolynom $p_t(\partial)$ - jetzt in Ω als Differentialoperator mit konstanten Koeffizienten aus $\mathbb{C}$ betrachtet, d.h. also als stetiger Endomorphismus $\varphi \mapsto p_t(\partial) \cdot \varphi$ des lokalkonvexen topologischen $\mathbb{C}$ -Vektorraumes $\mathcal{E}_{\mathbb{C}}(\Omega)$ bzw. $\mathcal{D}_{\mathbb{C}}(\Omega)$ - hinsichtlich der topologischen Dualität $(\mathcal{E}_{\mathbb{C}}(\Omega), \mathcal{E}'_{\mathbb{C}}(\Omega))$ bzw. $(\mathcal{D}_{\mathbb{C}}(\Omega), \mathcal{D}'_{\mathbb{C}}(\Omega))$ gebildete formal-transponierte Differentialoperator, ist der stetige Endomorphismus $T \mapsto {}^t p_t(\partial) \cdot T$ des mit der zugehörigen schwachen Topologie versehenen Distributionenraumes $(\mathcal{E}'_{\mathbb{C}}(\Omega), \sigma(\mathcal{E}'_{\mathbb{C}}(\Omega), \mathcal{E}_{\mathbb{C}}(\Omega)))$ bzw. $(\mathcal{D}'_{\mathbb{C}}(\Omega), \sigma(\mathcal{D}'_{\mathbb{C}}(\Omega), \mathcal{D}_{\mathbb{C}}(\Omega)))$ und wird durch ${}^t p_t(\partial) = p_t(-\partial)$ gegeben. Mithin folgen wegen $\text{Supp}(\omega) \cap M = \{t\}$ aus den Gleichungen (2.1), (2.3) und (2.2) die Beziehungen

$$\langle \omega, T \rangle = \langle \omega, p_t(\partial) \cdot \varepsilon_{ct} \rangle = \langle p_t(-\partial) \cdot \omega, \varepsilon_{ct} \rangle =$$

$$= \langle p_t(-\partial) \cdot \varphi, \varepsilon_{ct} \rangle = \langle \pi_p(-\partial) \cdot \varphi, \varepsilon_{ct} \rangle =$$

$$= (-1)^{|p|} \langle \pi_p(\partial) \cdot \varphi, \varepsilon_{ct} \rangle = (-1)^{|p|} \alpha_p \neq 0.$$

Die letzte Relation zeigt wegen $\omega \in \mathcal{D}'_c(\Omega)$ und $\text{Supp}(\omega) \subseteq U_t$, daß $t \in \text{Supp}(T)$ zutrifft, daß also allgemein $M \subseteq \text{Supp}(T)$ gilt. Zusammen mit der bereits bewiesenen Inklusion folgt daraus die gewünschte Gleichung $M = \text{Supp}(T)$.

(iii) Es sei jetzt umgekehrt eine auf der offenen Menge Ω definierte, komplexe Distribution $T_0 \in \mathcal{D}'_c(\Omega)$ vorgegeben mit dem diskreten Träger $\text{Supp}(T_0) = M \subseteq \Omega$. Es bleibt noch die Aufgabe, zu zeigen, daß T_0 auf eindeutige Weise in der Form (2.1) dargestellt werden kann. Zu diesem Nachweis ist es zweckmäßig, den Begriff der Garbe der Keime von komplexen Distributionen auf der Menge Ω heranzuziehen, die wie folgt mit Hilfe eines Garbendatums über Ω - man vergleiche etwa F. HIRZEBRUCH [15; Kap. I, § 2] - konstruiert wird:

Falls U, V ein beliebiges Paar offener Teilmengen von Ω ist mit der Eigenschaft $V \subseteq U$, so bezeichnen wir im nachstehenden mit $\text{rest}_{VU} : \mathcal{D}'_c(U) \longrightarrow \mathcal{D}'_c(V)$ die natürliche Einschränkungssabbildung. Man versteht darunter denjenigen Morphismus in der Kategorie $\mathcal{V}\mathcal{S}$ der $\mathbb{C}$ -Vektorräume, welcher jeder Distribution $T \in \mathcal{D}'_c(U)$ auf der offenen Menge U ihre Einschränkung auf den offenen Teil V von U zuordnet, also

$$\text{rest}_{VU} : \mathcal{D}'_c(U) \ni T \longmapsto \text{rest}_V(T) = T|_V \in \mathcal{D}'_c(V).$$

Offenbar ist die lineare Abbildung $\text{rest}_{V,U}$ gerade die transponierte Transformation zu jener hinsichtlich der kanonischen (LF)-Topologien stetigen linearen Abbildung von $\mathcal{D}'_{\mathbb{C}}(V)$ in $\mathcal{D}'_{\mathbb{C}}(U)$, welche jeder Testfunktion aus dem Raum $\mathcal{D}'_{\mathbb{C}}(V)$ ihre natürliche Fortsetzung auf U im unter (ii) erläuterten Sinne zuordnet. Durchlaufen die Paare U, V mit $V \subseteq U$ die offenen Teilmengen von Ω und trifft man noch wie üblich die Übereinkunft, daß unter $\mathcal{D}'_{\mathbb{C}}(\emptyset)$ der triviale $\mathbb{C}$ -Vektorraum $\{0\}$ (Null-Objekt der Kategorie VS) verstanden werden soll, so bildet die Kollektion $\{\mathcal{D}'_{\mathbb{C}}(U), \text{rest}_{V,U}\}$ ein Garbendatum von $\mathbb{C}$ -Vektorräumen über Ω . Die von diesem Garbendatum über Ω - betrachtet als ein auf der Kategorie der offenen Teilmengen von Ω definierter kontravarianter Funktor mit Werten in der Kategorie VS - erzeugte Garbe heißt die Garbe der Keime von komplexen Distributionen auf Ω und soll im folgenden mit $\mathcal{V}'_{\mathbb{C}}(\Omega)$ angedeutet werden.

Wir bringen das $\mathcal{V}'_{\mathbb{C}}(\Omega)$ erzeugende Garbendatum $\{\mathcal{D}'_{\mathbb{C}}(U), \text{rest}_{V,U}\}$ über Ω auf die bekannte Weise mit Hilfe der Familie der kanonischen Homomorphismen mit dem kanonischen Garbendatum der Garbe $\mathcal{V}'_{\mathbb{C}}(\Omega)$ in Zusammenhang. Ist U irgendeine offene Teilmenge von Ω und ferner $\Gamma(U, \mathcal{V}'_{\mathbb{C}}(\Omega))$ der

$\mathbb{C}$ -Vektorraum der stetigen Schnitte in der Garbe $\mathcal{D}'_{\mathbb{C}}(\Omega)$ über der Menge U , so bezeichnen wir für jede komplexe Distribution $T \in \mathcal{D}'_{\mathbb{C}}(U)$ mit $s_T^U \in \Gamma(U, \mathcal{D}'_{\mathbb{C}}(\Omega))$ denjenigen Schnitt in $\mathcal{D}'_{\mathbb{C}}(\Omega)$ über U , welcher jeden Punkt $t \in U$ genau auf den durch T über t erzeugten Distributionskeim $\gamma_t(T)$ aus dem Halm über t abbildet und weiter noch mit $\theta_U: T \longmapsto s_T^U$ den zu U gehörenden, sog. kanonischen Morphismus von $\mathcal{D}'_{\mathbb{C}}(U)$ in $\Gamma(U, \mathcal{D}'_{\mathbb{C}}(\Omega))$ innerhalb der Kategorie VS. Aufgrund des Lokalisationsprinzips für Distributionen (vgl. L. SCHWARTZ [27; Chap. I, § 3]) und der bekannten Charakterisierung der "vollständigen" Garbendaten nach J.-P. SERRE [28] ist durch den kanonischen Morphismus $\theta_U: \mathcal{D}'_{\mathbb{C}}(U) \longrightarrow \Gamma(U, \mathcal{D}'_{\mathbb{C}}(\Omega))$ sogar ein Vektorraum-Isomorphismus gegeben. Diese Tatsache werden wir im folgenden auf die Familie $\theta_{\Omega}(\mathcal{D}'_{\mathbb{C}}(\Omega)) = \{s_T^{\Omega} \in \Gamma(\Omega, \mathcal{D}'_{\mathbb{C}}(\Omega)) \mid T \in \mathcal{D}'_{\mathbb{C}}(\Omega)\}$ globaler Schnitte in der Garbe $\mathcal{D}'_{\mathbb{C}}(\Omega)$ anwenden.

Wegen der vorausgesetzten Isoliertheit der Punkte aus M läßt sich zu jedem Punkt $t \in M$ eine offene Umgebung U_t in Ω wählen mit der Eigenschaft $U_t \cap M = \{t\}$. Weil mithin die auf U_t eingeschränkte Distribution $\text{rest}_{U_t, \Omega}(T_o) = \text{rest}_{U_t}(T_o) = T_o|_{U_t}$ aus $\mathcal{D}'_{\mathbb{C}}(U_t)$ für jeden Punkt $t \in M$ den einpunktigen Träger

$$\text{Supp}(T_o|_{U_t}) = U_t \cap \text{Supp}(T_o) = \{t\}$$

in U_t besitzt, hat diese nach einem bekannten Satz der Distributionentheorie (vgl. L. SCHWARTZ [27; Chap. III, § 10]) die Gestalt $p_t(\varphi) \cdot \epsilon_{\{t\}}$, mit einem eindeutig bestimmten Differentialpolynom, das aus genau einem, vom Nullpolynom verschiedenen, Polynom $p_t(X)$ aus der $\mathbb{C}$ -Algebra $\mathbb{C}[X]$ durch Substitution entsteht. Setzt man jetzt die Abbildung $t \longmapsto p_t(X)$ von M in $\mathbb{C}[X]$ dadurch von der Menge M aus eindeutig auf ganz Ω fort, daß man jedem Punkt $t \in \bigcup_{\Omega} M$ des Komplements das Nullpolynom aus $\mathbb{C}[X]$ zuordnet und bildet sodann, mit Hilfe der Familie $\{p_t(X) \in \mathbb{C}[X] \mid t \in \Omega\}$ von Polynomen, gemäß Vorschrift (2.1) die komplexe Distribution $T \in \mathcal{D}'_{\mathbb{C}}(\Omega)$, so erzeugen T_0 und T über jedem Punkt $t \in \Omega$ denselben Distributionskeim $\gamma_t(T_0) = \gamma_t(T)$, weil ja offensichtlich $\text{rest}_{U_t}(T_0) = \text{rest}_{U_t}(T)$ für jeden Punkt $t \in M$ erfüllt ist. Für die durch T_0 und T bestimmten globalen Schnitte in der Garbe $\mathcal{D}'_{\mathbb{C}}(\Omega)$ bedeutet dies gerade die Identität $s_{T_0}^{\Omega} = s_T^{\Omega}$, so daß offenbar für die Bilder der beiden betrachteten Distributionen $T_0 \in \mathcal{D}'_{\mathbb{C}}(\Omega)$ und $T \in \mathcal{D}'_{\mathbb{C}}(\Omega)$ unter dem zu Ω gehörenden kanonischen Morphismus $\theta_{\Omega}: \mathcal{D}'_{\mathbb{C}}(\Omega) \rightarrow \Gamma(\Omega, \mathcal{D}'_{\mathbb{C}}(\Omega))$ die Gleichheit

$$\theta_{\Omega}(T_0) = \theta_{\Omega}(T)$$

gewährleistet ist. Da aber nach den obigen Über-

legungen die lineare Abbildung $\theta_{\Omega} : \mathcal{D}'_{\mathbb{C}}(\Omega) \rightarrow \Gamma(\Omega, \mathcal{D}'_{\mathbb{C}}(\Omega))$ sogar einen Vektorraum-Isomorphismus darstellt, folgt die globale Identität $T_{\Omega} = T$ in Ω . Weil ferner nach dem Voraufgegangenen auch die Eindeutigkeit der Darstellung auf der Hand liegt, ist die Behauptung bewiesen. -

Anmerkungen: (i) Wir haben im Teil (i) des vorstehenden Beweises die Summierbarkeit der Distributionenfamilie $\{p_t(\varphi), \varepsilon_{\{t\}}\} \mid t \in \Omega\}$ zu T in bezug auf die schwache Topologie $\sigma(\mathcal{D}'_{\mathbb{C}}(\Omega), \mathcal{D}_{\mathbb{C}}(\Omega))$ des Distributionenraumes $\mathcal{D}'_{\mathbb{C}}(\Omega)$ nachgewiesen. Tatsächlich ist jedoch diese Familie auch noch hinsichtlich der starken Topologie $\beta(\mathcal{D}'_{\mathbb{C}}(\Omega), \mathcal{D}_{\mathbb{C}}(\Omega))$ des Raumes $\mathcal{D}'_{\mathbb{C}}(\Omega)$ zur gleichen Distribution T summierbar. Man sieht dies durch die folgende Überlegung ein:

Der $\mathbb{C}$ -Vektorraum $\mathcal{D}_{\mathbb{C}}(\Omega)$ ist bezüglich seiner separierten lokalkonvexen Ausgangstopologie, nämlich der kanonischen (LF)-Topologie, ein MONTEL-Raum (vgl. Abschnitt 1.1). Die MONTEL-Eigenschaft respektiert bekanntlich den Übergang zum starken topologischen Dual $(\mathcal{D}'_{\mathbb{C}}(\Omega), \beta(\mathcal{D}'_{\mathbb{C}}(\Omega), \mathcal{D}_{\mathbb{C}}(\Omega)))$, so daß auf jeder beschränkten Teilmenge von $(\mathcal{D}'_{\mathbb{C}}(\Omega), \beta(\mathcal{D}'_{\mathbb{C}}(\Omega), \mathcal{D}_{\mathbb{C}}(\Omega)))$ die Relativtopologien der schwachen und starken Topologie zusammenfallen. Folglich ist jeder hinsichtlich

der schwachen Topologie $\sigma(\mathcal{D}'_c(\Omega), \mathcal{D}_c(\Omega))$ gegen eine Distribution $T_0 \in \mathcal{D}'_c(\Omega)$ konvergierende Filter mit einer abzählbaren Basis auf $\mathcal{D}'_c(\Omega)$ auch noch gegen T_0 in bezug auf die starke Topologie $\beta(\mathcal{D}'_c(\Omega), \mathcal{D}_c(\Omega))$ konvergent; man vergleiche N. BOURBAKI [4; Chap. IV, § 3]. Weil aber, wie man sich durch eine einfache Überlegung überzeugt, die Mächtigkeit der Menge M sicher $\leq \aleph_0$ ist, erweist sich, wie behauptet, die Distributionenfamilie in (2.1) $\{p_t(\varphi) \in \mathcal{D}_c, t \in \Omega\}$ auch als im Raum $\mathcal{D}'_c(\Omega)$ stark summierbar und zwar ebenfalls wieder zur Distribution T .

(ii) Die gemäß (2.1) konstruierte Distribution $T \in \mathcal{D}'_c(\Omega)$ ist genau dann von endlicher Ordnung auf Ω , falls ihr Träger M eine endliche Menge ist. Diese Tatsache ist eine unmittelbare Folgerung aus dem Struktursatz für Distributionen endlicher Ordnung auf Ω (vgl. L. SCHWARTZ [27; Chap. III, § 8]) und der Eindeutigkeit der Darstellung (2.1) der Distribution T .

(iii) Legt man an Stelle des n -dimensionalen reellen euklidischen Raumes $\mathbb{R}^n$ allgemeiner eine beliebige abelsche lokalkompakte topologische Gruppe zugrunde, so lassen sich mit Hilfe etwas subtilerer Überlegungen die Ergebnisse des Satzes 2-1 in weitem Umfang auch noch im Rahmen der die klassische Theorie von

L. SCHWARTZ verallgemeinernden Distributionentheorie von J. RISS [24] bestätigen. Für die in Kapitel II beabsichtigten Anwendungen des Satzes 2-1 reicht indessen die obige Formulierung aus. Auch auf die nahe-
liegende Verallgemeinerung auf reelle parakompakte differenzierbare Mannigfaltigkeiten soll in Anbetracht unserer Zielsetzung hier nicht näher eingegangen werden.

2.2. Wir wenden uns jetzt einer Charakterisierung der sich für die linearen Diskretisierungsalgorithmen als besonders wichtig erweisenden komplexen Distributionen auf Ω mit endlichem Träger zu. Der Träger $\text{Supp}(T)$ einer jeden derartigen Distribution $T \in \mathfrak{D}'_c(\Omega)$ ist natürlich insbesondere kompakt und diskret. Es gilt also sogar $T \in \mathcal{E}'_c(\Omega)$, so daß T von endlicher Ordnung m auf der offenen Menge Ω ist, d.h. es gilt $T \in \mathcal{E}^m_c(\Omega)$, aber $T \notin \mathcal{E}^{m+1}_c(\Omega)$ mit einer eindeutig bestimmten, im weiteren festzuhaltenden natürlichen Zahl $m \geq 0$. Aufgrund der Darstellung (1.3) des Distributionenraumes $\mathcal{E}^m_c(\Omega)$ und des bereits in der Anmerkung (ii) herangezogenen Struktursatzes für Distributionen endlicher Ordnung auf Ω ist demnach T eine endliche Linearkombination von komplexen RADON-Maßen auf Ω und deren distributionentheoretischen Ableitungen der Ordnung $\leq m$. Der vorstehende Satz 2-1 beweist, daß es sich dabei nur

genau um DIRAC-Maße auf Ω und deren Ableitungen handelt. In Bereitstellung für § 3 formulieren wir den speziellen Fall $n = 1$ noch explizit als folgenden, sich unmittelbar aus Satz 2-1 ergebenden

Satz 2-2: Es sei $\{t_0, t_1, \dots, t_k\}$ eine aus genau $k + 1$ paarweise verschiedenen Punkten bestehende Teilmenge des offenen Teilintervalles Ω der reellen Zahlengerade $\mathbb{R}^1$. Die komplexen, auf Ω definierten Distributionen der Ordnung $\leq m$, ($m \geq 0$), mit in der Punktmenge $\{t_0, t_1, \dots, t_k\}$ enthaltenem Träger bilden einen $(m + 1) \cdot (k + 1)$ -dimensionalen Untervektorraum $\mathcal{M}$ des $\mathbb{C}$ -Vektorraumes $\mathcal{E}'^m(\Omega)$, welcher sich als direkte Summe

$$(2.4) \quad \mathcal{M} = \bigoplus_{\nu=0}^m E_{\nu} = E_0 \oplus E_1 \oplus \dots \oplus E_m$$

der $(k + 1)$ -dimensionalen $\mathbb{C}$ -linearen Hüllen E_{ν} der Distributionenfamilien $\{\partial^{\nu} \epsilon_{\alpha_0}, \partial^{\nu} \epsilon_{\alpha_1}, \dots, \partial^{\nu} \epsilon_{\alpha_k}\}$, $0 \leq \nu \leq m$, im Raum $\mathcal{E}'^m(\Omega)$ darstellen läßt.

Läßt man in Satz 2-2 lediglich komplexe Distributionen der Ordnung $m = 0$ auf Ω zu, so erhält man speziell noch (vgl. N. BOURBAKI [5; Chap. III]) das folgende bekannte Resultat über diskrete RADON-Maße:

Korollar: Jedes komplexe RADON-Maß aus dem Raum

$\mathcal{M}_C^c(\Omega)$, dessen Träger in der Punktmenge $\{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ enthalten ist, läßt sich auf eindeutige Weise als endliche Summe komplexer Punktmaße $\alpha_n e_{\{t_n\}} \in \mathcal{M}_C^c(\Omega)$, $(0 \leq n \leq k)$, darstellen.

2.3. Es sei noch als Ergänzung erwähnt, daß sich der vorstehende Satz 2-2 auch auf sehr naheliegende Weise direkt - ohne auf den viel allgemeineren Satz 2-1 zurückzugreifen - und "konstruktiv" mit Hilfe der HERMITE-Interpolation beweisen läßt. Dazu beachten wir zunächst, daß die wie stets mit ihrer natürlichen FRÉCHET-Raum-Topologie, d.h. mit der separierten Topologie der Konvergenz auf den kompakten Teilmengen von Ω für die Funktionen und allen ihren Ableitungen der Ordnung $\leq m$ versehene Funktionenmenge $\mathcal{E}_C^m(\Omega)$ über die bisher ausschließlich betrachtete komplexe Vektorraumstruktur hinaus hinsichtlich der üblichen punktweisen Verknüpfungen die Struktur einer kommutativen, assoziativen $\mathbb{C}$ -Algebra trägt. Es ist klar, daß für jeden vorgegebenen Punkt $t \in \Omega$ die durch Bildung der abgeschlossenen Hülle von $\{\varphi \in \mathcal{E}_C^m(\Omega) \mid \text{Supp}(\varphi) \subseteq \bigcup_{\Omega} \{t\}\}$ im Grundraum $\mathcal{E}_C^m(\Omega)$ gewonnene Funktionenmenge, welche sich ja auch als Durchschnitt $m + 1$ abgeschlossener, homogener Hyperebenen in $\mathcal{E}_C^m(\Omega)$ gemäß

$$\mathcal{A}_t^{(m)} = \bigcap_{v=0}^m \text{Ker } \mathcal{V}_{\varepsilon_{(t)}} = \bigcap_{v=0}^m \{ \psi \in \mathcal{E}_{\mathbb{C}}^m(\Omega) \mid (\frac{d^v}{dt^v} \psi)(t) = 0 \}$$

(wobei $\text{Ker } \mathcal{V}_{\varepsilon_{(t)}}$ den Kern der für $0 \leq v \leq m$ stetigen Linearform $\mathcal{V}_{\varepsilon_{(t)}} \neq 0$ auf $\mathcal{E}_{\mathbb{C}}^m(\Omega)$ bezeichnet) darstellen läßt, ein hinsichtlich der genannten separierten lokalkonvexen Vektorraumtopologie abgeschlossenes Ideal der $\mathbb{C}$ -Algebra $\mathcal{E}_{\mathbb{C}}^m(\Omega)$ definiert. Das gleiche trifft natürlich auch für den Durchschnitt

$$(2.5) \quad \mathcal{A}^{(m)} = \bigcap_{n=0}^h \mathcal{A}_{t_n}^{(m)}, \quad (m \geq 0),$$

derartiger Punktideale zu. Bezeichnet $j : \mathcal{A}^{(m)} \longrightarrow \mathcal{E}_{\mathbb{C}}^m(\Omega)$ den kanonischen Monomorphismus und $\pi : \mathcal{E}_{\mathbb{C}}^m(\Omega) \longrightarrow \mathcal{E}_{\mathbb{C}}^m(\Omega)/\mathcal{A}^{(m)}$ den kanonischen Epimorphismus, wobei es sich ja bei beiden um topologische Homomorphismen, d.h. um strikte Morphismen hinsichtlich der zugehörigen natürlichen lokalkonvexen Vektorraumtopologien handelt, so erhält man in der Kategorie LCTVS die folgende kurze exakte Sequenz als Diagramm

$$(2.6) \quad 0 \longrightarrow \mathcal{A}^{(m)} \xrightarrow{j} \mathcal{E}_{\mathbb{C}}^m(\Omega) \xrightarrow{\pi} \mathcal{E}_{\mathbb{C}}^m(\Omega)/\mathcal{A}^{(m)} \longrightarrow 0.$$

Es sei daran erinnert, daß durch $E \longmapsto (E'; \sigma(E', E))$, $v \longmapsto \tau_v$ ein kontravarianter Funktor auf der Kategorie LCTVS definiert wird. Durch topologisches Trans-

ponieren der strikten Morphismen gewinnt man (vgl. N. BOURBAKI [4; Chap. II]) aus der kurzen exakten Sequenz (2.6) in topologischer Dualität für die mit den zugehörigen schwachen Vektorraum-Topologien versehenen topologischen Dualräume die nachstehende kurze exakte Sequenz

$$(2.7) \quad 0 \longrightarrow (\mathcal{E}_{\mathbb{C}}^m(\Omega)/\mathcal{A}^{(m)})' \xrightarrow{\tau} \mathcal{E}_{\mathbb{C}}^m(\Omega) \xrightarrow{i} (\mathcal{A}^{(m)})' \longrightarrow 0.$$

Das Ideal $\mathcal{A}^{(m)}$ besitzt über dem Körper $\mathbb{C}$ die endliche Kodimension $(m+1) \cdot (k+1)$, denn konstruiert man zu den vorgegebenen $k+1$ paarweise verschiedenen Punkten $\{t_0, t_1, \dots, t_k\} \subset \Omega$ die aus der Theorie der HERMITE-Interpolation her bekannten, eindeutig bestimmten, auf das Intervall Ω eingeschränkten, elementaren HERMITE-Polynomfunktionen $h_{\mu\nu}$, ($0 \leq \mu \leq k, 0 \leq \nu \leq m$), vom Grade $\leq (k+1) \cdot m + k$ gemäß der Vorschrift

$$(2.8a) \quad h_{\mu\nu}: \Omega \ni \tau \longmapsto \frac{(-1)^{m-\nu}}{\nu!} \omega(\tau) \cdot (\tau - t_{\mu})^{\nu-m-1} \cdot \left\langle \frac{(s-t_{\mu})^{m+1}}{\omega(s)}, \partial^{m-\nu} \varepsilon_{(t_{\mu})} \right\rangle$$

mit Hilfe der Knotenfunktion aus dem Raum $\mathcal{E}_{\mathbb{C}}(\Omega)$

$$(2.8b) \quad \omega: \Omega \ni \tau \longmapsto \left[\prod_{\mu=0}^k (\tau - t_{\mu}) \right]^{m+1},$$

so bildet die zugehörige Familie

$$\pi(\{h_{\mu\nu} \in \mathcal{E}_{\mathbb{C}}^m(\Omega) \mid 0 \leq \mu \leq k, 0 \leq \nu \leq m\}) = \{h_{\mu\nu} + \mathcal{A}^{(m)} \mid 0 \leq \mu \leq k, 0 \leq \nu \leq m\}$$

von Äquivalenzklassen $\text{mod } \mathfrak{A}^{(m)}$ bereits ein minimales Erzeugendensystem der Quotientenalgebra $\mathcal{E}_{\mathbb{C}}^m(\Omega) / \mathfrak{A}^{(m)}$ über dem Körper $\mathbb{C}$. Daraus folgt $\text{codim}_{\mathbb{C}} \mathfrak{A}^{(m)} = (m+1) \cdot (k+1)$. Wegen der bereits oben erwähnten Abgeschlossenheit des Ideals $\mathfrak{A}^{(m)}$ im Grundraum $\mathcal{E}_{\mathbb{C}}^m(\Omega)$ stimmt nach dem Isomorphiesatz von A. TYCHONOFF die separierte lokal-konvexe Quotiententopologie von $\mathcal{E}_{\mathbb{C}}^m(\Omega) / \mathfrak{A}^{(m)}$ mit der kanonischen Produkttopologie überein. Mithin fallen der (untopologisierte) topologische Dual $(\mathcal{E}_{\mathbb{C}}^m(\Omega) / \mathfrak{A}^{(m)})'$ und der algebraische Dual $(\mathcal{E}_{\mathbb{C}}^m(\Omega) / \mathfrak{A}^{(m)})^*$ des hausdorffschen lokalkonvexen topologischen Quotientenvektorraumes $\mathcal{E}_{\mathbb{C}}^m(\Omega) / \mathfrak{A}^{(m)}$ gerade zusammen. Aus (2.7) erhält man deshalb nach Anwendung des die schwachen topologischen Strukturen vergessenden Funktors die kurze exakte Sequenz

$$(2.9) \quad 0 \longrightarrow (\mathcal{E}_{\mathbb{C}}^m(\Omega) / \mathfrak{A}^{(m)})^* \xrightarrow{\tau} \mathcal{E}_{\mathbb{C}}^m(\Omega) \xrightarrow{\tau} (\mathfrak{A}^{(m)})' \longrightarrow 0.$$

Man entnimmt diesem Diagramm in der Kategorie VS, daß der bezüglich der topologischen Dualität $(\mathcal{E}_{\mathbb{C}}^m(\Omega), \mathcal{E}_{\mathbb{C}}^m(\Omega)')$ zum Ideal $\mathfrak{A}^{(m)}$ konstruierte Orthogonal, d.h. die Absolutpolare $(\mathfrak{A}^{(m)})^0$ von $\mathfrak{A}^{(m)}$ in $\mathcal{E}_{\mathbb{C}}^m(\Omega)$, für die ja offenbar $(\mathfrak{A}^{(m)})^0 = (\text{Im } j)^0 = \text{Ker } {}^t j$ gilt, vermöge des zum kanonischen Epimorphismus $\pi : \mathcal{E}_{\mathbb{C}}^m(\Omega) \longrightarrow \mathcal{E}_{\mathbb{C}}^m(\Omega) / \mathfrak{A}^{(m)}$ kontragredienten Isomorphismus $\widetilde{{}^t \pi}$ mit dem algebraischen

Dual $(\mathcal{E}_C^m(\Omega) / \mathcal{M}^{(m)})^*$ des komplexen Quotientenvektor-
raumes $\mathcal{E}_C^m(\Omega) / \mathcal{M}^{(m)}$ kanonisch identifiziert werden
kann. Der Vorletzte ist über dem Körper $\mathbb{C}$ ebenfalls
(m + 1). (k + 1)-dimensional und wird, wie aus den
folgenden, durch die Antiderivationen modifizierten
Biorthogonalitätsrelationen

$$\langle \delta_{t_\mu} + \mathcal{M}^{(m)}, \partial \delta_{t_\nu} \rangle = (-1)^{\nu} \delta_{\mu, \nu} \delta_{\nu, \lambda}, \quad 0 \leq \mu \leq k, \quad 0 \leq \nu, \lambda \leq m$$

(KRONECKER-Symbole!) hervorgeht, von den Distributionen
 $\partial \delta_{t_\nu}$, $(0 \leq \nu \leq k, 0 \leq \nu \leq m)$, aus dem $\mathbb{C}$ -Vektorraum
 $\mathcal{E}_C^m(\Omega)$ mit dem einpunktigen Träger $\{t_\mu\}$ aufgespannt.
Demnach ist also der topologische Orthogonal $(\mathcal{M}^{(m)})^0$
von $\mathcal{M}^{(m)}$ sicher im Untervektorraum $\mathcal{N} = \{T \in \mathcal{E}_C^m(\Omega) \mid$
 $\text{Supp}(T) \subseteq \{t_0, t_1, \dots, t_k\}\}$ von $\mathcal{E}_C^m(\Omega)$ enthalten.
Weil aber andererseits aufgrund eines geläufigen
Satzes der Distributionentheorie (vgl. L. SCHWARTZ
[27; Chap. III, § 8]) auch die konverse Inklusion
 $\mathcal{N} \subseteq (\mathcal{M}^{(m)})^0$ gültig ist, hat man zusammengefaßt die
Richtigkeit der Gleichung

$$\mathcal{N} = (\mathcal{M}^{(m)})^0.$$

Damit ist Satz 2-2 erneut bewiesen.

Wir notieren noch als Ergebnis unserer Überlegungen
die soeben hergeleitete "geometrische" Charakterisierung

des $\mathbb{C}$ -Vektorraumes $\mathcal{M}$ gesondert im folgenden

Satz 2-3: Der Untervektorraum $\mathcal{M} = \{T \in \mathcal{E}'_{\mathbb{C}}(\Omega) \mid \text{Supp}(T) \subset \{t_0, t_1, \dots, t_n\} \text{ des komplexen Vektorraumes } \mathcal{E}'_{\mathbb{C}}(\Omega), (n \geq 0), \text{ ist hinsichtlich der topologischen Dualität } (\mathcal{E}_{\mathbb{C}}(\Omega), \mathcal{E}'_{\mathbb{C}}(\Omega)) \text{ genau der Orthogonal } (\mathcal{M}')^0 \text{ des bezüglich der FRÉCHET-Raum-Topologie abgeschlossenen Ideals (2.5) der kommutativen } \mathbb{C}\text{-Algebra } \mathcal{E}_{\mathbb{C}}(\Omega)\}.$

In Kapitel II wollen wir noch zusätzlich voraussetzen, daß die vorgegebenen Punkte $t_n, (0 \leq n \leq k)$, äquidistant im Intervall Ω liegen. Für die linearen Diskretisierungsalgorithmen bei Anfangswertproblemen gewöhnlicher Differentialgleichungen werden sich dann bestimmte Untervektorräume des $\mathbb{C}$ -Vektorraumes $\mathcal{M}$ als besonders interessant erweisen; ihre Elemente sollen als komplexe DAHLQUIST-Distributionen bezeichnet werden. Zu ihrer Charakterisierung in Satz 3-1 werden wir auf die im Beweis zu Satz 2-3 benützten Argumentationen wieder zurückgreifen.

Kapitel II. - Theorie der linearen Diskretisierungs-
algorithmen für Anfangswertprobleme gewöhnlicher
Differentialgleichungen

Es ist das große Verdienst von G. DAHLQUIST [8], [9], [10], die vielerlei in der Praxis benutzten, auf der Integration von Interpolationspolynomen beruhenden linearen Mehrschrittalgorithmen zur Diskretisierung nichtlinearer Anfangswertprobleme gewöhnlicher Differentialgleichungen, von denen an dieser Stelle nur etwa an das (explizite) ADAMS-BASHFORTH-Verfahren und das (implizite) ADAMS-MOULTON-Verfahren, an die SIMPSON-Regel und die NYSTRÖM-Methode erinnert sei, mit einem einzigen, einheitlichen, durch heuristische Überlegungen motivierten Ansatz erfaßt zu haben und sie dann als erster mit Hilfe dieses Ansatzes im Rahmen einer tiefgreifenden allgemeinen Theorie auf ihre numerischen Eigenschaften hin konsequent untersucht zu haben. Man vergleiche für eine systematische Zusammenstellung der speziellen Verfahren CESCHINO-KUNTZMANN [7] und für eine auch die theoretischen Aspekte stark in den Vordergrund rückende Dar-

stellung, P. HENRICI [13], [14].

Eine äquivalente distributionentheoretische Formulierung des allgemeinen komplexen Anfangswertproblems erster Ordnung bzw. eines speziellen komplexen Anfangswertproblems m -ter Ordnung für gewöhnliche Differentialgleichungen dient uns in § 3 als Ausgangspunkt für die Entwicklung des Begriffs der komplexen DAHLQUIST-Distribution. Dabei erweist es sich, daß dem oben erwähnten allgemeinen Diskretisierungsansatz von G. DAHLQUIST insofern tatsächlich keine Willkür anhaftet, als dieser aus einigen wenigen, naturgemäßen Forderungen, welche man an diesen stellen wird und die in Abschnitt 3.3 genau angegeben werden, bereits zwangsläufig folgt. An die unter Auszeichnung einer Basis zunächst formulierte Definition des Vektorraumes der DAHLQUIST-Distributionen schließt sich in Satz 3-1 eine weitere Charakterisierung dieses Raumes als topologischer Orthogonal an. Sodann folgt eine "geometrische" Definition des Approximationsgrades von DAHLQUIST-Distributionen, welche ihrerseits Anlaß gibt zu einer näheren Untersuchung von Untervektorräumen gewisser speziellerer, aber für die Praxis besonders wichtiger DAHLQUIST-Distributionen.

Das eigentliche Grundproblem des § 4 besteht darin,

für diejenige Komponente der DAHLQUIST-Distributionen vom Approximationsgrad ≥ 0 , welche aus einem diskreten RADON-Maß besteht, genauer gesprochen für den Hauptteil der DAHLQUIST-Distributionen im Sinne des Abschnitts 4.1, eine anschauliche Interpretation zu finden. Im reellen Fall bieten sich die stationären* MARKOFF-Ketten mit beschränktem Gedächtnis als anschaulich - wahrscheinlichkeitstheoretische Modellvorstellung an. Wir führen sie in der hier benötigten Form mit Hilfe des Diffusionsbegriffes ein. Im komplexen Fall dient als Surrogat der in Abschnitt 4.5 geprägte Begriff des von einem linearen Diskretisierungsalgorithmus induzierten stationären Punktprozesses.

Die in § 4 ausführlich dargelegten integrations-theoretischen Begriffsbildungen geben die Möglichkeit in die Hand, in § 5 eine neue, den Verhältnissen wirklich angemessene und auch der anschaulichen Vorstellung leicht zugängliche Definition der numerischen Stabilität linearer Diskretisierungsalgorithmen voranzustellen. Um gleichzeitig noch eine schärfere Herausarbeitung ihrer wesentlichen Charakterzüge erreichen zu können, erweist es sich als zweckmäßig, eine etwas allgemeinere Fassung in Form der sog. numerischen 1-Stabilität zugrunde zu legen. Eine Untersuchung

* In der neueren Literatur auch "homogen" genannt.

dieser Begriffsbildung mit funktionalanalytischen Methoden wirft neues Licht auch auf die Stabilitätsbegriffe von H. RUTISHAUSER und G. DAHLQUIST, welche sich leicht als Spezialfälle unterordnen lassen. Ferner wird in § 5 der Versuch unternommen, in kurzen Zügen Verbindungen zu weiteren Stabilitätsbegriffen, nämlich zu dem der totalen, der dynamischen und schließlich zu dem der absoluten Stabilität im Sinne von M. REIMER von dem hier eingenommenen Standpunkt aus aufzuzeigen.

In § 6 schließlich führen wir für lineare Diskretisierungsalgorithmen den dem Begriff der numerischen l -Stabilität adäquaten Begriff der l -Konvergenz ein und untersuchen das asymptotische Verhalten der Diskretisierungsfehler bei gegen Null strebender Schrittweite. Es zeigt sich - vgl. Satz 6-2 -, daß für $l \leq m$ bei hinreichend "glatter" Lösungsfunktion des Anfangswertproblems aus numerischer l -Stabilität bereits auch die l -Konvergenz der Näherungslösung gefolgert werden kann.

§ 3: Räume von DAHLQUIST-Distributionen

3.1. Vorgegeben seien nichtleere offene Teilmengen I der reellen Zahlengerade $\mathbb{R}$ und H der komplexen Zahlenebene $\mathbb{C}$ und es sei weiter $(t,u) \longmapsto f(t,u)$ eine auf der offenen Produktmenge $I \times H \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{C}$ definierte, stetige komplexwertige Funktion, welche auf $I \times H$ eine globale LIPSCHITZ-Bedingung im zweiten Argument erfüllt. Aufgrund des klassischen Existenz- und Eindeutigkeitssatzes von CAUCHY existiert dann zu jedem vorgegebenen Punkt $(a, \xi_0) \in I \times H$ ein offenes, relativ kompaktes Intervall Ω mit $a \in \Omega$ und $\bar{\Omega} \subset I$, so daß das (nichtlineare) komplexe Anfangswertproblem erster Ordnung

$$\begin{aligned} & u'(t) = f(t, u(t)), \quad \forall t \in \bar{\Omega} \\ (AWP_1) \quad & u(a) = \xi_0 \end{aligned}$$

genau eine Lösung $u : \bar{\Omega} \longrightarrow H$ besitzt.

Der Ausgangspunkt für unsere Überlegungen ist die Frage, was unter dem Begriff der linearen Diskretisierung des Anfangswertproblems (AWP_1) zu verstehen ist. Um darauf eine präzise Antwort geben zu können,

erweist es sich als zweckmäßig, zum distributionen-
theoretischen Standpunkt überzugehen. Mit Hilfe der
Familie $\{\varepsilon_{(t)} \in \mathcal{E}'_{\mathbb{C}}(\Omega) \mid t \in \Omega\}$ von komplexen DIRAC-
Distributionen auf Ω läßt sich (AWP₁) auf die fol-
gende "punktuelle" Gestalt umformen:

$$(3.1) \quad \begin{aligned} \left\langle \frac{d}{ds} u, \varepsilon_{(t)} \right\rangle - f(t, u(t)) &= 0, \quad \forall t \in \Omega \\ \langle u, \varepsilon_{(a)} \rangle &= \xi_0. \end{aligned}$$

Der Übergang vom Grundraum $\mathcal{E}'_{\mathbb{C}}(\Omega) \ni u$ zu seinem
topologischen Dual, dem komplexen Distributionen-
raum $\mathcal{E}''_{\mathbb{C}}(\Omega)$, d.h. also genauer der Übergang vom
stetigen Endomorphismus $\frac{d}{ds}$ des komplexen FRÉCHET-
Raumes $\mathcal{E}'_{\mathbb{C}}(\Omega)$ zu seinem formal-transponierten
Differentialoperator $-\partial$ liefert aus (3.1) auf Ω
das folgende Gleichungssystem

$$(3.2) \quad \begin{aligned} \langle u, \partial \varepsilon_{(t)} \rangle + f(t, u(t)) &= 0, \\ \langle u, \varepsilon_{(a)} \rangle &= \xi_0. \end{aligned}$$

Die in (3.2) auftretende, schwach stetige Abbildung
 $\Delta' : t \longmapsto \partial \varepsilon_{(t)}$ des offenen Intervalls $\Omega \subset \mathbb{R}$ in
den komplexen lokalkonvexen topologischen Vektorraum
($\mathcal{E}''_{\mathbb{C}}(\Omega), \sigma(\mathcal{E}'_{\mathbb{C}}(\Omega), \mathcal{E}'_{\mathbb{C}}(\Omega))$) nennen wir aus
einem Grund, der in § 4 deutlich werden wird, eine

komplexe Hyperdiffusion erster Ordnung von Ω in sich.

Unsere Antwort auf die zuvor gestellte Frage lautet wie folgt:

Unter einer linearen Diskretisierung auf Ω des komplexen Anfangswertproblems (AWP₁) verstehen wir die Ersetzung der vorgegebenen Distributionenfamilie

$\Delta'(\Omega) = \{ \partial \varepsilon_{\alpha} \in \mathcal{E}'_C(\Omega) \mid t \in \Omega \}$ erster Ordnung auf Ω mit dem einpunktigen Träger $\{t\}$ durch eine Familie komplexer Distributionen $T_t \neq 0$ aus dem Raum $\mathcal{D}'_C(\Omega)$ mit diskretem Träger, so daß an die Stelle von (3.2) die Gleichungen

$$(3.3) \quad \langle u, T_t \rangle = 0$$

für geeignet gewählte Punkte $t \in \Omega$ treten.

Die allgemeine Form dieser Distributionen $T_t \in \mathcal{D}'_C(\Omega)$ wurde in Satz 2-1 bestimmt und wird noch durch weitere naheliegende Forderungen eingeeengt werden.

Wir deuten noch kurz eine weitere, zur vorausgegangenen äquivalente Möglichkeit an, mit Hilfe der Distributionentheorie den Begriff der linearen Diskretisierung zu präzisieren, ohne daß aber dieser zweite Weg später im einzelnen verfolgt werden soll. Der

Grundgedanke besteht hier darin, von vornherein den klassischen Funktionsbegriff aufzugeben: Die auf dem kompakten Intervall $\bar{\Omega} \subset \mathbb{R}$ stetigen komplexwertigen Funktionen $t \mapsto u(t)$ und $t \mapsto f(t, u(t))$ werden dadurch zu über $\mathbb{R}$ lokal LEBESGUE-integrierbaren Funktionen fortgesetzt, daß man jedem Punkt $t \in \int_{\mathbb{R}} \bar{\Omega}$ die Zahl 0 zuordnet und diese so auf ganz $\mathbb{R}$ fortgesetzten Funktionen gemäß den Bemerkungen in Abschnitt 1.2 in kanonischer Weise mit komplexen Distributionen auf $\mathbb{R}$ mit kompaktem Träger identifiziert. Mit Hilfe der distributionentheoretischen Faltung und des DIRAC-Maßes ε , welches ja gerade das Einheitsselement der kommutativen komplexen Faltungsalgebra $\mathcal{E}'_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ darstellt, nimmt die Differentialgleichung erster Ordnung in (AWP₁) die Form

$$u * \partial \varepsilon - f(., u) = 0$$

an, an deren Stelle nach linearer Diskretisierung die (wegen der Kompaktheit von $\text{Supp}(u)$ wohldefinierten) Distributionsgleichungen

$$u * T_t = 0$$

für geeignete Punkte $t \in \Omega$ treten.

3.2. Aus der elementaren Theorie der topologischen Gruppen ist bekannt, daß jede nichttriviale diskrete Untergruppe der additiven lokalkompakten topologischen Gruppe $\mathbb{R}^1$, d.h. jede Untergruppe $\neq \{0\}$ von $\mathbb{R}^1$, welche hinsichtlich der induzierten Relativtopologie einen diskreten topologischen Raum darstellt, ein $\mathbb{Z}$ -Modul $h \cdot \mathbb{Z}$ vom Rang 1 ist, wobei $h > 0$ eine reelle Zahl und $\mathbb{Z}$ den Ring der ganzen rationalen Zahlen bezeichnet, also ein "eindimensionales Gitter" mit der Gitterkonstante h . Die Spur S dieses Gitters auf dem halboffenen, relativ kompakten Teilintervall

$\Omega \cap [a, +\infty[$ von $\mathbb{R}$ besteht aus endlich vielen äquidistanten Punkten $t, t + h, \dots, t + kh$ mit $k \in \mathbb{N}$, falls $h > 0$ hinreichend klein gewählt wird. Ersetzt man zur linearen Diskretisierung des Anfangswertproblems (AWP₁) in (3.2) die Distributionenfamilie $\Delta^1(\Omega) = \{ \partial \varepsilon_{t,0} \in \mathcal{E}'_c(\Omega) \mid t \in \Omega \}$ durch komplexe Distributionen $T_{t,h} \neq 0$ auf Ω mit der Spurmenge $S = \{t, t + h, \dots, t + kh\}$ als Träger und fordert darüber hinaus, daß auch $T_{t,h}$ wie $\partial \varepsilon_{t,0}$ höchstens von erster Ordnung sein möge, daß also auch $T_{t,h} \in \mathcal{E}'_c(\Omega)$ gewährleistet sein soll, so hat die Distribution $T_{t,h}$ aufgrund von Satz 2-2 die Form

$$(3.4) \quad T_{t,h} = \sum_{n=0}^h \alpha_n \varepsilon_{(t+nh)} + \sum_{n=0}^h \alpha'_n \partial \varepsilon_{(t+nh)}$$

einer Linearkombination von DIRAC-Maßen auf Ω und deren ersten Ableitungen mit eindeutig bestimmten komplexen Koeffizienten $\alpha_n, \alpha'_n, (0 \leq n \leq k)$, welche nicht sämtlich verschwinden.

Vom Standpunkt der Elektrostatik läßt sich übrigens im reellen Fall die Distribution (3.4) sehr anschaulich interpretieren als lineare Überlagerung der Felder, welche von in den Gitterknoten $\{t + nh\} | 0 \leq n \leq k\}$ angebrachten elektrischen Punktladungen der Stärke α_n und elektrischen Dipolen mit in Richtung der positiven reellen Achse weisenden Dipolmomenten $-\alpha'_n$ im Vakuum induziert werden.

Es ist zweckmäßig, in (3.4) noch $\beta_n = \frac{1}{h} \alpha'_n$ für $0 \leq n \leq k$ zu setzen, so daß man die Distribution

$$T_{t,h} = \sum_{n=0}^k \alpha_n \varepsilon_{(t+nh)} + h \sum_{n=0}^k \beta_n \partial \varepsilon_{(t+nh)}$$

gewinnt; wir nennen $T_{t,h} \in \mathcal{E}'_C(\Omega)$ eine komplexe DAHLQUIST-Distribution erster Ordnung auf Ω mit Grundpunkt t , Schrittzahl k und Schrittweite $h > 0$. Im Hinblick auf die Wahl des Grundpunktes soll, falls nicht ausdrücklich etwas anderes gesagt wird, stets vereinbart sein, daß nur solche Punkte $t \in \Omega$ als zulässig gelten, für die noch das ganze kompakte Intervall $[t, t + kh]$ in Ω enthalten ist.

Das Anfangswertproblem (AWP_1) erster Ordnung nimmt jetzt die linear diskretisierte Form

$$(3.3') \quad \langle u, T_{t,h} \rangle = 0$$

an, wobei die Gleichung (3.3') in dem Sinne als eine "asymptotische Näherungsgleichung" zu interpretieren ist, daß für die exakte Lösung u von (AWP_1) und hinreichend klein gewählter Schrittweite $h > 0$ stets auch $|\langle u, T_{t,h} \rangle|$ in jedem zulässigen Grundpunkt $t \in \Omega$ "klein" ausfällt. Sie vermag also erst dann ein wirklich sinnvoller Ersatz für die Ausgangs-Differentialgleichung zu sein, falls bei fest gewähltem Grundpunkt t die Elemente der betrachteten Einparameterfamilie $\{T_{t,h} \in \mathcal{E}'_C(\Omega) \mid h > 0\}$ komplexer DAHLQUIST-Distributionen der Schrittzahl k eine hinreichend gute Approximation der ursprünglich vorgegebenen Distribution $\mathcal{Q}_{\varepsilon_{(t)}}$ liefern, d.h. also, falls deren Koeffizienten $\alpha_n, \beta_n, (0 \leq n \leq k)$, in $\mathbb{C}$ möglichst "günstig" gewählt sind. Dieser Gesichtspunkt führt zum Orthogonalitätsprinzip und zum Begriff des Approximationsgrades bei DAHLQUIST-Distributionen. Bevor wir jedoch darauf in Abschnitt 3.5 näher eingehen, nehmen wir erst noch eine Erweiterung der Problemstellung vor.

3.3. Es sei $m \geq 1$ eine fest gewählte natürliche Zahl. Wir behalten im folgenden die in Abschnitt 3.1 eingeführten Bezeichnungen bei und verstehen insbesondere unter f wieder eine komplexwertige stetige (globale) LIPSCHITZ-Funktion auf der offenen Produktmenge $I \times H \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{C}$. In Verallgemeinerung von (AWP_1) betrachten wir für einen Punkt $(a, \xi_0) \in I \times H$ und für gegebene komplexe Zahlen $\xi_1, \dots, \xi_{m-1}$ das spezielle komplexe Anfangswertproblem m -ter Ordnung auf I der Form

$$\begin{aligned} u^{(m)}(t) &= f(t, u(t)) \\ (AWP_m) \qquad \qquad \qquad (m \geq 1) \\ u^{(v)}(a) &= \xi_v, \quad (0 \leq v \leq m-1), \end{aligned}$$

zu dem wieder auf einem offenen, relativ kompakten, den vorgegebenen Punkt a umfassenden Intervall Ω mit $\bar{\Omega} \subset I$ eine eindeutig bestimmte Lösung $u : \bar{\Omega} \rightarrow H$ existiert.

In der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen besteht der üblicherweise einzuschlagende Weg, um für Anfangswertprobleme bei Differentialgleichungen höherer, etwa m -ter Ordnung, Existenz- und Eindeutigkeitsaussagen zu gewinnen, in der Reduktion auf ein äquivalentes System von m gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung. Im reellen Fall ist in der

Literatur von verschiedenen Autoren, insbesondere von W.E. MILNE [18; Chap. 6], P. HENRICI [13; Chap. 3], E. STIEFEL [30; Abschnitt 6.41] und speziell unter Zugrundelegung des RUNGE-KUTTA-Verfahrens von H. RUTISHAUSER [26] auf die keineswegs auf der Hand liegende Tatsache hingewiesen worden, daß derartige, für die Theorie äußerst nützliche, jedoch dem Prinzip des direkten Angriffs widersprechende Reduktionen auch für die numerische Behandlung gewöhnlicher Differentialgleichungen höherer Ordnung durchaus geeignet sind und nicht notwendig zu einem gegenüber den direkten Verfahren stärkeren Auflaufen von Abbrech- und Rundefehlern führen müssen. Trotzdem ist aber in der Numerik diese Verfahrensweise im Falle des vorliegenden speziellen Anfangswertproblems (AWP_m) nicht empfehlenswert, weil nämlich diese auf eine "künstliche" Einführung von in der ursprünglichen Differentialgleichung $u^{(m)} = f(.,u)$ selbst gar nicht auftretenden und deshalb nur in seltenen Fällen interessierenden Ableitungen niedrigerer Ordnung hinausläuft. Aus diesem Grunde erscheint die Aufstellung einer eigenen linearen Diskretisierungstheorie für den speziellen Problemtyp (AWP_m) als durchaus lohnend, zumal gerade auch dieser Typus, für $m = 2$ besonders in der Himmels- und Raumflugmechanik - man denke an die Bewegungs-

gleichung für das ungestörte Zweikörperproblem - ,
nicht selten auftritt.

Analog zu (3.2) schreiben wir die komplexe Differential-
gleichung m-ter Ordnung $\langle \frac{d^m}{ds^m} u, \varepsilon_{\{t\}} \rangle - f(t, u(t)) = 0$
unter Zugrundelegung der topologischen Dualität
($\mathcal{E}'_c(\Omega)$, $\mathcal{E}''_c(\Omega)$) mit Hilfe des zu $\frac{d^m}{ds^m}$ formal-trans-
ponierten Differentialoperators $(-1)^m \partial^m$ auf die Form

$$\langle u, \partial^m \varepsilon_{\{t\}} \rangle + (-1)^{m+1} f(t, u(t)) = 0$$

um und diskretisieren diese wieder ganz entsprechend
dadurch linear, daß wir die Distribution $\partial^m \varepsilon_{\{t\}} \in \mathcal{E}''_c(\Omega)$
m-ter Ordnung auf Ω mit dem einpunktigen Träger $\{t\}$
durch eine nicht verschwindende komplexe Distribution
 $T_{t, t} \in \mathcal{D}'_c(\Omega)$ ersetzen. An $T_{t, t}$ stellen wir zunächst
die folgende Forderung:

Die Distribution $T_{t, t}$ besitzt die Gitter-
(DD1) spur $S = \{t, t + h, \dots, t + kh\} \subset \Omega \cap [\alpha, +\infty[$
als Träger, ($k \in \mathbb{N}$).

Im Hinblick auf die Interpolationstheorie wird durch
die Bedingung (DD1) die Frage aufgeworfen, ob sich
etwa die Wahl nichtäquidistanter Punkte als Träger der
Distribution $T_{t, t}$ als numerisch effizienter erweisen

würde. Denn bekanntlich läßt sich, nachdem noch falls nötig eine geeignete Intervallreduzierung vorgenommen worden ist, in dem zur Polynominterpolation reellwertiger Funktionen gehörenden CAUCHY-Restglied die ČEBYŠEV-Norm des dort auftretenden Knotenpolynoms dadurch minimieren, daß man die Nullstellen eines ČEBYŠEV-Polynoms als Interpolationsknoten zugrunde legt. Die GAUSS-JACOBI-Theorie der numerischen Integration würde ebenfalls die Wahl einer nichtäquidistanten Punktreihe als Stützstellen nahelegen. Im vorliegenden Falle erzwingen jedoch rein rechen-technische Gründe die Invarianz der Knotenmenge gegenüber Translationen um die Strecke h und damit natürlich auch die Äquidistanz der Trägerpunkte von $T_{t,t}$.

Die zweite Forderung lautet:

(DD2) Die Ordnung der Distribution $T_{t,t}$ stimmt mit der Ordnung $m \geq 1$ des Anfangswertproblems (AWP_m) überein, d.h. es gilt $T_{t,t} \in \mathcal{E}'^m(\Omega)$.

Aufgrund von Satz 2-2 hat dann $T_{t,t}$ die Gestalt

$$(3.5) \quad T_{t,t} = \sum_{v=0}^m \sum_{n=0}^h \gamma_{v,n} \partial^v \varepsilon_{(t,n,t)}$$

mit eindeutig bestimmter komplexer Koeffizienten-

matrix $(\gamma_{\nu\mu})_{\substack{0 \leq \nu \leq m \\ 0 \leq \mu \leq k}} \neq 0$.

Eine elektrostatische Interpretation der Distribution (3.5) bei reellen Koeffizienten mit Hilfe aufgepflanzter elektrischer Multipole liegt auf der Hand. Weil, wie weiter oben betont wurde, bei der linearen Diskretisierung keine der numerisch nicht unmittelbar erfaßbaren Ableitungen der Ordnung $1 \leq \nu \leq m-1$ auftreten sollen, ergibt sich schließlich als dritte Forderung an die Distribution $T_{t,t}$:

In der komplexen $(m+1, k+1)$ -
(DD3) Matrix $(\gamma_{\nu\mu})_{\substack{0 \leq \nu \leq m \\ 0 \leq \mu \leq k}}$ gilt $\gamma_{\nu\mu} = 0$ für
 $1 \leq \nu \leq m-1$ und $0 \leq \mu \leq k$.

Setzt man ferner noch $\alpha_\mu = \gamma_{0\mu}$ und (vgl. die Anmerkung zu Satz 3-2) $\beta_\mu = -\frac{1}{(-t)^\mu} \gamma_{m\mu}$, ($0 \leq \mu \leq k$), so erhält (3.5) die Gestalt

$$T_{t,t} = \sum_{\mu=0}^k \alpha_\mu \varepsilon_{(t+\mu t)} - (-t)^m \cdot \sum_{\mu=0}^k \beta_\mu \delta^m \varepsilon_{(t+\mu t)}$$

Wir nennen $T_{t,t} \in \mathcal{E}'^m_C(\Omega)$ eine komplexe DAHLQUIST-Distribution m-ter Ordnung auf Ω mit Grundpunkt t , Schrittzahl $k \geq 1$ und Schrittweite $h > 0$; falls $\alpha_k = +1$ gilt, wird $T_{t,t}$ normiert genannt. In naheliegender Erweiterung der in Abschnitt 3.1 eingeführten

Begriffsbildung bezeichnen wir ferner die stetige Abbildung $\Delta_{t,h}^m : t \mapsto T_{t,h}$ von Ω in den topologischen Vektorraum $(\mathcal{E}'^m(\Omega), \sigma(\mathcal{E}'^m(\Omega), \mathcal{E}^m(\Omega)))$ als eine komplexe Hyperdiffusion m-ter Ordnung des Intervalls $\Omega \subset \mathbb{R}$ in sich.

Man entnimmt den voraufgegangenen Überlegungen die folgende wichtige Ergänzung zur DAHLQUIST-Theorie: Wenn man dem angestrebten Diskretisierungs-begriff für das Anfangswertproblem (AWP_m) m-ter Ordnung, ($m \geq 1$), einige sehr naheliegende und natur-gemäße Bedingungen auferlegt, nämlich neben (DD1), (DD2) und (DD3) vor allem die Forderung der Linearität, so wird man auf dem hier eingeschlagenen Weg über die Distributionentheorie mit Hilfe des Satzes 2-2 zwangsläufig auf den allgemeinen Diskretisierungsansatz von G. DAHLQUIST [8], [9] geführt. Ein anderer Diskre-tisierungsansatz ist unter den hier zugrunde gelegten Bedingungen prinzipiell nicht möglich.

3.4. Die Menge $\mathcal{E}_{t,h}^m(\Omega; \mathbb{C})$ aller (nicht notwendig normierter) komplexer DAHLQUIST-Distributionen m-ter Ordnung auf Ω mit zulässigem Grundpunkt $t \in \Omega$, Schrittzahl $k \geq 1$ und Schrittweite $h > 0$ bildet für $m \geq 1$ einen $2(k+1)$ -dimensionalen Vektorraum über dem Körper $\mathbb{C}$, genauer einen $2(k+1)$ -dimensionalen

Untervektorraum des komplexen Distributionenraumes $\mathcal{E}'_{\mathbb{C}}(\Omega)$. Falls E_0 bzw. E_m die $(k+1)$ -dimensionalen $\mathbb{C}$ -linearen Hüllen der Distributionenfamilien $\{\varepsilon_{(t,x)}\}_{0 \leq x \leq k}$ bzw. $\{(-h)^m \mathcal{D}'_{\varepsilon_{(t,x)}}\}_{0 \leq x \leq k}$ im Raum $\mathcal{E}'_{\mathbb{C}}(\Omega)$ bedeuten, läßt sich der $\mathbb{C}$ -Vektorraum $\mathcal{D}'_{t,x}(\Omega; \mathbb{C})$ gemäß (2.4) als direkte Summe der Form

$$(3.6) \quad \mathcal{D}'_{t,x}(\Omega; \mathbb{C}) = E_0 \oplus E_m, \quad (m \geq 1),$$

darstellen. Es ist zweckmäßig, bei den Räumen $\mathcal{D}'_{t,x}(\Omega; \mathbb{C})$ auch noch $m = 0$ zuzulassen. Wir identifizieren im folgenden stets $\mathcal{D}'_{t,x}(\Omega; \mathbb{C})$ mit dem $(k+1)$ -dimensionalen Untervektorraum E_0 des $\mathbb{C}$ -Vektorraumes $\mathcal{M}_{\mathbb{C}}(\Omega)$ der komplexen RADON-Maße auf Ω mit kompaktem Träger.

Wir wollen in Parallele zu Satz 2-3 eine weitere Charakterisierung des Vektorraumes $\mathcal{D}'_{t,x}(\Omega; \mathbb{C})$ für $m \geq 0$ geben, welche aber nicht wie die Darstellung (3.6) unmittelbar aus Eigenschaften des Trägers der DAHLQUIST-Distributionen $T_{t,x} \in \mathcal{D}'_{t,x}(\Omega; \mathbb{C})$ gewonnen ist, sondern über den Grundraum $\mathcal{E}'_{\mathbb{C}}(\Omega)$ selbst verläuft. Zu diesem Zweck führen wir für jede natürliche Zahl $m \geq 0$ zum zulässigen Grundpunkt $t \in \Omega$ in Analogie zum Ideal (2.5) den abgeschlossenen Untervektorraum

$$(3.7) \quad U_{t,k}^{(m)} = \bigcap_{n=0}^k \{ \psi \in \mathcal{E}_C^m(\Omega) \mid \psi(t+xk) = (\frac{d^m}{dx^m} \psi)(t+xk) = 0 \} \supseteq \bigcap_{n=0}^k U_{t,k+xk}^{(m)}$$

des komplexen FRECHET-Raumes $\mathcal{E}_C^m(\Omega)$ ein, wobei die auf der rechten Seite stehende Inklusion für $m > 1$ echt ist. Trivialerweise ist jede DAHLQUIST-Distribution $T_{t,k} \in \mathcal{D}_{t,k}^m(\Omega; \mathbb{C})$ zum Vektorraum $U_{t,k}^{(m)}$ orthogonal. Um nun aber den ganzen zu $U_{t,k}^{(m)}$ hinsichtlich der topologischen Dualität $(\mathcal{E}_C^m(\Omega), \mathcal{E}_C^m(\Omega))$ konstruierten Orthogonal zu bestimmen, beachten wir, daß $\text{codim}_{\mathbb{C}} U_{t,k}^{(m)} = 2(k+1)$ für $m \geq 1$ und $\text{codim}_{\mathbb{C}} U_{t,k}^{(0)} = k+1$ gilt. Diese Tatsache ergibt sich genau wie im Beweis zu Satz 2-3, wobei wir die dort eingeführten Bezeichnungen sinngemäß übernehmen, einfach dadurch, daß man im Falle $m \geq 1$ zu der $(k+1)$ -punktigen Gitterspur $S = \{t+xk \mid 0 \leq x \leq k\} \subset \Omega$ die elementaren HERMITE-Polynomfunktionen $h_{x,0}$, $h_{x,m}$ bzw. im Falle $m = 0$ die elementaren LAGRANGE-Polynomfunktionen $h_{x,0}$ für $0 \leq x \leq k$ auf Ω mit Hilfe der Formeln (2.8a) und (2.8b) konstruiert und bemerkt, daß die zugehörigen Äquivalenzklassen $\pi(\{h_{x,v} \in \mathcal{E}_C^m(\Omega) \mid 0 \leq x \leq k, v = 0, m\}) = \{h_{x,0} + U_{t,k}^{(m)}, h_{x,m} + U_{t,k}^{(m)} \mid 0 \leq x \leq k\} \bmod U_{t,k}^{(m)}$ bzw. $\{h_{x,0} + U_{t,k}^{(0)} \mid 0 \leq x \leq k\} \bmod U_{t,k}^{(0)}$ bereits den komplexen Quotientenvektorraum $\mathcal{E}_C^m(\Omega) / U_{t,k}^{(m)}$ für $m \geq 1$ bzw. $\mathcal{E}_C^0(\Omega) / U_{t,k}^{(0)}$ aufspannen. Mit Hilfe kanonischer Identifizierung des topologischen Orthogonals

$(U_{t,h}^{(m)})^0 = (\text{Im } j)^0 = \text{Ker } {}^t j$ des Vektorraumes $U_{t,h}^{(m)}$ mit dem algebraischen Dual von $\mathcal{E}_C^m(\Omega) / U_{t,h}^{(m)}$ für $m \geq 0$ aufgrund der kurzen exakten Sequenz (vgl. (2.9))

$$0 \longrightarrow (\mathcal{E}_C^m(\Omega) / U_{t,h}^{(m)})^* \xrightarrow{{}^t \pi} \mathcal{E}_C^m(\Omega) \xrightarrow{{}^t j} (U_{t,h}^{(m)})' \longrightarrow 0$$

erkennt man ferner, daß $(U_{t,h}^{(m)})^0$ für $m \geq 1$ von den Distributionen $\{\varepsilon_{(t+\pi h)}, \partial^\alpha \varepsilon_{(t+\pi h)} \mid 0 \leq \alpha \leq k\}$ im $\mathbf{C}$ -Vektorraum $\mathcal{E}_C^m(\Omega)$ bzw. daß $(U_{t,h}^{(0)})^0$ von den DIRAC-Maßen $\{\varepsilon_{(t+\pi h)}, \mid 0 \leq \alpha \leq k\}$ in $\mathcal{M}_C^c(\Omega)$ aufgespannt wird. Zusammengefaßt ergibt sich also aus diesen Überlegungen der folgende

Satz 3-1: Der $\mathbf{C}$ -Vektorraum $\mathcal{T}_{t,h}^m(\Omega; \mathbf{C})$ aller komplexer DAHLQUIST-Distributionen m -ter Ordnung auf dem offenen Intervall $\Omega \subset \mathbf{R}$ mit zulässigem Grundpunkt $t \in \Omega$, Schrittzahl $k \geq 1$ und Schrittweite $h > 0$ bildet für $m \geq 0$ den hinsichtlich der topologischen Dualität $(\mathcal{E}_C^m(\Omega), \mathcal{E}_C^m(\Omega))$ konstruierten Orthogonal $(U_{t,h}^{(m)})^0$ des abgeschlossenen Untervektorraumes (3.7) des komplexen Grundraumes $\mathcal{E}_C^m(\Omega)$. Es gilt $\dim_{\mathbf{C}} \mathcal{T}_{t,h}^0(\Omega; \mathbf{C}) = k+1$ und für $m \geq 1$ ferner $\dim_{\mathbf{C}} \mathcal{T}_{t,h}^m(\Omega; \mathbf{C}) = 2(k+1)$.

Einen Überblick über die gegenseitige Lage der bislang

betrachteten Distributionenräume zueinander liefert das nachstehende kommutative Diagramm von kanonischen Monomorphismen in der Kategorie VS bzw. von VS-Isomorphismen:

$$(3.8) \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{\mathbb{C}}^{\circ}(\Omega) & \longrightarrow & \mathcal{E}_{\mathbb{C}}^{\prime m}(\Omega) \\ \uparrow & & \uparrow \\ \mathcal{T}_{t,t}^{\circ}(\Omega; \mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathcal{T}_{t,t}^{\prime m}(\Omega; \mathbb{C}) \\ \uparrow \text{21} & & \uparrow \text{21} \\ (U_{t,t}^{(0)})^{\circ} & \longrightarrow & (U_{t,t}^{(m)})^{\circ} \end{array}$$

Es sei noch auf die Tatsache hingewiesen, daß bei Zugrundelegung der reellen Zahlen als Körper der Skalare sich auf dem $\mathbf{R}$ -Vektorraum $\mathcal{T}_{t,t}^{\prime m}(\Omega; \mathbf{R})$ für $m \geq 1$ keine natürliche Ordnung, d.h. keine Vektorraum-Ordnung mit Hilfe der Spur auf $\mathcal{T}_{t,t}^{\prime m}(\Omega; \mathbf{R})$ des zum spitzen konvexen Kegel $\mathcal{E}_{\mathbf{R}}^{\prime m}(\Omega)_+$ dualen Kegels in $\mathcal{E}_{\mathbf{R}}^{\prime m}(\Omega)$ als Ordnungskegel induzieren läßt, weil sich sonst nach einem bekannten Ergebnis der Distributionentheorie (vgl. L. SCHWARTZ [27; Chap. I, § 4]) jedes Element $T_{t,t} \in \mathcal{T}_{t,t}^{\prime m}(\Omega; \mathbf{R})_+$ notwendig auf ein RADON-Maß aus dem Kegel $\mathcal{M}_{\mathbf{R}}^{\circ}(\Omega)_+$ reduzieren müßte. Dies ist aber wegen $m \geq 1$ ausgeschlossen, denn distributionentheoretische Ableitungen von DIRAC-Maßen sind sicherlich keine RADON-Maße. Anders liegen die Verhältnisse beim

$\mathbb{R}$ -Vektorraum $\mathcal{E}_{t,t}^{\circ}(\Omega; \mathbb{R})$; man vergleiche Abschnitt 1.3. Wir werden in § 4 auf die Ordnungseigenschaften von $\mathcal{E}_{t,t}^{\circ}(\Omega; \mathbb{R})$ im Rahmen einer wahrscheinlichkeitstheoretischen Modellvorstellung zurückgreifen.

3.5. Wir kehren nunmehr wieder zurück zu der ursprünglich vorgegebenen Distribution $\mathcal{D}^m \varepsilon_{(t)} \in \mathcal{E}_C^m(\Omega)$ mit dem abgeschlossenen Untervektorraum

$$U_t^{(m)} = \kappa_t \mathcal{D}^m \varepsilon_{(t)} = \{ \psi \in \mathcal{E}_C^m(\Omega) \mid (\frac{d^m}{ds^m} \psi)(t) = 0 \}, t \in \Omega,$$

des Grundraumes $\mathcal{E}_C^m(\Omega)$ als Kern. Es ist klar, daß $U_t^{(m)}$ für jeden Punkt $t \in \Omega$ den m -dimensionalen komplexen Vektorraum $\mathcal{P}_{m-1}(\Omega; \mathbb{C})$ aller Polynomfunktionen auf Ω vom Grade $\leq m-1$ mit komplexen Koeffizienten echt umfaßt und daß der Vektorraum $\mathcal{P}_{m-1}(\Omega; \mathbb{C})$ auch durch die Beziehung

$$\mathcal{P}_{m-1}(\Omega; \mathbb{C}) = \bigcap_{t \in \Omega} U_t^{(m)}$$

gekennzeichnet werden kann. Der jetzt einzuführende Begriff des Approximationsgrades dient gewissermaßen als Charakteristikum dafür, wie "umfangreich", bezogen auf den komplexen Vektorraum $\mathcal{P}_{m-1}(\Omega; \mathbb{C})$ der Kern der die vorgegebene Distribution $\mathcal{D}^m \varepsilon_{(t)}$ auf Ω approximierenden DAHLQUIST-Distribution $T_{t,t}$ ist. Unter Zu-

grundelegung der monoton absteigenden Kette topologischer Orthogonale im $\mathbb{C}$ -Vektorraum $\mathcal{E}'^m(\Omega)$ mit den zugehörigen kanonischen Injektionen in der Kategorie $\mathcal{V}\mathcal{J}$

$$\dots \leftarrow \mathcal{P}_{m-1}(\Omega; \mathbb{C})^\circ \leftarrow \mathcal{P}_m(\Omega; \mathbb{C})^\circ \leftarrow \dots \leftarrow \mathcal{P}_{p+m-1}(\Omega; \mathbb{C})^\circ \leftarrow \mathcal{P}_{p+m}(\Omega; \mathbb{C})^\circ \leftarrow \dots$$

als "Vergleichsskala" definieren wir wie folgt:

Die komplexe DAHLQUIST-Distribution $T_{t,t} \in \mathcal{E}'^m(\Omega; \mathbb{C})$ m -ter Ordnung auf Ω besitzt den Approximationsgrad $p \geq 0$ genau dann, falls $T_{t,t}$ im Sinne der topologischen Dualität $(\mathcal{E}''(\Omega), \mathcal{E}'^m(\Omega))$ zum $(p+m)$ -dimensionalen Untervektorraum $\mathcal{P}_{p+m-1}(\Omega; \mathbb{C})$, jedoch nicht zum $(p+m+1)$ -dimensionalen Untervektorraum $\mathcal{P}_{p+m}(\Omega; \mathbb{C})$ des Grundraumes $\mathcal{E}''(\Omega)$ orthogonal ist, falls also $T_{t,t}$ der Menge $\mathcal{P}_{p+m-1}(\Omega; \mathbb{C})^\circ \setminus \mathcal{P}_{p+m}(\Omega; \mathbb{C})^\circ$ angehört (Orthogonalitätsprinzip).

Wir schließen eine explizite Charakterisierung der DAHLQUIST-Distributionen vom Approximationsgrad p mit Hilfe ihrer Gewichtskoeffizienten an. Es gilt der folgende elementare

Satz 3-2: Die komplexe DAHLQUIST-Distribution

$T_{t,t} = \sum_{n=0}^h \alpha_n \varepsilon_{(t+n,t)} - (-h)^m \sum_{n=0}^h \beta_n \partial_{\varepsilon_{(t+n,t)}}^m$ m -ter Ordnung auf Ω besitzt dann und nur dann den Approximations-

grad $p \geq 0$, falls von ihren Koeffizienten die Bedingungen für $m \geq 0$

$$(3.9) \quad \sum_{\alpha=0}^h \alpha_{\alpha} x^{\alpha} - \prod_{\lambda=0}^{m-1} (\alpha - \lambda) \cdot \sum_{\alpha=0}^h \beta_{\alpha} x^{\alpha-m} = 0, \quad (0 \leq \alpha \leq p+m-1),$$

$$\sum_{\alpha=0}^h \alpha_{\alpha} x^{p+m} - \prod_{\lambda=0}^{m-1} (p+m-\lambda) \cdot \sum_{\alpha=0}^h \beta_{\alpha} x^p \neq 0$$

erfüllt werden (mit der Konvention $0^0 = 1$).

Beweis: Laut Definition besitzt die Distribution

$T_{t,t} \in \mathcal{D}'_{t,t}(\Omega; \mathbb{C})$ genau dann den Approximationsgrad p , falls $T_{t,t}$ zu den $(p+m)$ Basisvektoren $\xi \mapsto (\xi - t)^{\nu}$, $(0 \leq \nu \leq p+m-1)$, des $(p+m)$ -dimensionalen $\mathbb{C}$ -Vektorraumes $\mathcal{P}_{p+m-1}(\Omega; \mathbb{C})$, nicht aber zur Polynomfunktion $(p+m)$ -ten Grades $\xi \mapsto (\xi - t)^{p+m}$ orthogonal ist, also genau dann, falls die Bedingungen

$$\langle (\xi - t)^{\nu}, T_{t,t} \rangle = 0 \quad (0 \leq \nu \leq p+m-1), \quad \langle (\xi - t)^{p+m}, T_{t,t} \rangle \neq 0$$

von $T_{t,t}$ erfüllt werden. Aus diesen errechnet man unmittelbar die Bedingungen (3.9). -

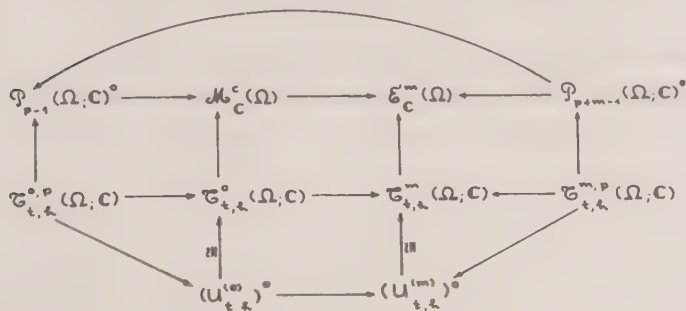
Anmerkung: Es ist zu beachten, daß in den Bedingungen (3.9) die Schrittweite h der betrachteten DAHLQUIST-Distribution $T_{t,t}$ nicht auftritt. Dies wurde durch

Aufnahme des Faktors h^m in die Koeffizienten von $T_{t,k}$ erreicht.

Wir bezeichnen im folgenden mit $\mathcal{D}_{t,k}^{m,p}(\Omega; \mathbb{C})$ die Menge aller komplexer DAHLQUIST-Distributionen m -ter Ordnung, ($m \geq 0$), auf dem offenen Intervall $\Omega \subset \mathbb{R}$ mit zulässigem Grundpunkt $t \in \Omega$, Schrittzahl $k \geq 1$, Schrittweite $h > 0$ mit einem Approximationsgrad $\geq p \geq 0$. Dann bildet $\mathcal{D}_{t,k}^{m,p}(\Omega; \mathbb{C})$ einen Untervektorraum des $\mathbb{C}$ -Vektorraumes $\mathcal{D}_{t,k}^m(\Omega; \mathbb{C})$; $\mathcal{D}_{t,k}^{m,p}(\Omega; \mathbb{C})$ läßt sich aufgrund von Satz 3-1 als Durchschnitt topologischer Orthogonale in der Form

$$\mathcal{D}_{t,k}^{m,p}(\Omega; \mathbb{C}) = (U_{t,k}^{(m)})^0 \cap \mathcal{P}_{p+m-1}(\Omega; \mathbb{C})^0, \quad (m \geq 0),$$

darstellen. Das Diagramm (3.8) läßt sich mithin zum nachstehenden kommutativen Diagramm in der Kategorie VS ergänzen, innerhalb dessen natürlich ebenso wie in (3.8) die Absolutpolaren-Bildung $M \mapsto M^0$ jeweils im Sinne der angemessenen topologischen Dualität $(\mathcal{E}_C^0(\Omega), \mathcal{M}_C^c(\Omega))$ bzw. $(\mathcal{E}_C^m(\Omega), \mathcal{E}_C^m(\Omega))$ zu verstehen ist:



3.6. Wir stellen uns die Aufgabe, mit Hilfe von Satz 3-2 für $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{E}_{t,t}^{m,p}(\Omega; \mathbb{C})$ im Falle $m \geq 1$ beidseitige Schranken anzugeben. Weil der Obervektorraum $\mathcal{E}_{t,t}^m(\Omega; \mathbb{C})$ gemäß der Darstellung (3.6) die direkte Summe $(k+1)$ -dimensionaler $\mathbb{C}$ -Vektorräume im Distributionenraum $\mathcal{E}_{\mathbb{C}}^m(\Omega)$ ist, ziehen wir zu diesem Zweck zwei mit F_1 und F_2 bezeichnete Exemplare des Vektorraumes $\mathbb{C}^{h+1}$ heran und gewinnen ersichtlich durch die lineare Abbildung

$$\tau: \mathcal{E}_{t,t}^m(\Omega; \mathbb{C}) \ni T_{t,t} = \sum_{\alpha=0}^k \alpha_{\alpha} \varepsilon_{(t+\alpha, t)} - (-t)^m \sum_{\alpha=0}^h \beta_{\alpha} \delta_{\varepsilon_{(t+\alpha, t)}} \longmapsto$$

$$(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_k, \beta_0, \beta_1, \dots, \beta_h) \in F_1 \oplus F_2$$

einen $\mathbb{C}$ -Isomorphismus des Vektorraumes $\mathcal{E}_{t,t}^m(\Omega; \mathbb{C})$ auf den (zu $\mathbb{C}^{2h+2}$ kanonisch isomorphen) direkten Summenraum $F_1 \oplus F_2$. Wir setzen $\alpha_{\nu}^* = x^{\nu}$ und $\beta_{\nu}^* = -\prod_{\lambda=0}^{m-1} (\nu - \lambda) \cdot x^{\nu-m}$ für $0 \leq \nu \leq p+m-1$, $0 \leq \nu \leq k$, so daß also insbesondere $\beta_{\nu}^* = 0$ für $0 \leq \nu \leq m-1$, $0 \leq \nu \leq k$ gilt und definieren eine Familie $\{x_{\nu}^* \in (F_1 \oplus F_2)^* \mid 0 \leq \nu \leq p+m-1\}$ nicht lauter verschwindender Elemente des algebraischen Duals von $F_1 \oplus F_2$, welche in bezug auf die zur kanonischen Basis von $F_1 \oplus F_2$ duale Basis von $(F_1 \oplus F_2)^*$ als Kovektoren gerade die Koordinaten $-2(k+1)$ -tupel $x_{\nu}^* = (\alpha_{\nu_0}^*, \alpha_{\nu_1}^*, \dots, \alpha_{\nu_k}^*, \beta_{\nu_0}^*, \beta_{\nu_1}^*, \dots, \beta_{\nu_h}^*)$

besitzen. Dann läßt sich aufgrund von Satz 3-2 der Untervektorraum $\tau(\mathcal{C}_{i,l}^{m,p}(\Omega; \mathbb{C}))$ von $F_1 \oplus F_2$ als Durchschnitt von maximal $(p+m)$ homogenen, d.h. durch den Nullpunkt von $F_1 \oplus F_2$ gehenden Hyperebenen gemäß

$$(3.10) \quad \tau(\mathcal{C}_{i,l}^{m,p}(\Omega; \mathbb{C})) = \bigcap_{v=0}^{p+m-1} \ker \mathcal{A}_v^* = \bigcap_{v=0}^{p+m-1} \{ \mathcal{A} \in F_1 \oplus F_2 \mid \langle \mathcal{A}, \mathcal{A}_v^* \rangle = 0 \}$$

darstellen. Weil im Falle $k+2 \leq p+m$ offenbar die ersten $k+2$ Spalten in der reellen $(p+m, 2k+2)$ -Matrix mit den Zeilenvektoren $(\mathcal{A}_v^*)_{0 \leq v \leq p+m-1}$ über dem Körper $\mathbb{C}$ linear unabhängig sind, gelten für den Rang der Linearformenfamilie $\{ \mathcal{A}_v^* \in (F_1 \oplus F_2)^* \mid 0 \leq v \leq p+m-1 \}$ über $\mathbb{C}$ die Abschätzungen

$$(3.11) \quad \inf (p+m, h+2) \leq \text{rg}(\{ \mathcal{A}_v^* \in (F_1 \oplus F_2)^* \mid 0 \leq v \leq p+m-1 \}) \leq \inf (p+m, 2h+2).$$

Die in (3.11) angegebenen Rangsschranken sind insofern bereits optimal, als diese, wie man sich leicht überzeugt, auch effektiv angenommen werden können. Wegen der Beziehung

$$\dim_{\mathbb{C}} \tau(\mathcal{C}_{i,l}^{m,p}(\Omega; \mathbb{C})) = \dim_{\mathbb{C}} (F_1 \oplus F_2) - \text{codim}_{\mathbb{C}} \tau(\mathcal{C}_{i,l}^{m,p}(\Omega; \mathbb{C}))$$

folgt aus der Darstellung (3.10) die Dimensionsgleichung

$$(3.12) \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{E}_{t,h}^{m,p}(\Omega; \mathbb{C}) = 2(h+1) - \text{rg}(\{u_v \in (F \oplus F_1)^* \mid 0 \leq v \leq p+m-1\}),$$

aus der sich mit Hilfe von (3.11) die folgenden, ohne einschränkende Voraussetzungen bestmöglichen Schranken

$$(3.13) \sup(2h+2-p-m, 0) \leq \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{E}_{t,h}^{m,p}(\Omega; \mathbb{C}) \leq \sup(2h+2-p-m, h)$$

für die Dimension des $\mathbb{C}$ -Vektorraumes $\mathcal{E}_{t,h}^{m,p}(\Omega; \mathbb{C})$ errechnen. Zusammengefaßt erhält man aus diesen Überlegungen den nachstehenden

Satz 3-3: Die Menge aller komplexer DAHLQUIST-Distributionen der Ordnung $m \geq 1$ auf Ω mit zulässigem Grundpunkt $t \in \Omega$, Schrittzahl $k \geq 1$, Schrittweite $h > 0$ und einem Approximationsgrad $\geq p \geq 0$ bildet einen Untervektorraum $\mathcal{E}_{t,h}^{m,p}(\Omega; \mathbb{C})$ des $\mathbb{C}$ -Vektorraumes $\mathcal{E}_{t,h}^m(\Omega; \mathbb{C})$, der sich folgendermaßen charakterisieren läßt: Genau die Elemente $T_{t,h} \in \mathcal{E}_{t,h}^{m,p}(\Omega; \mathbb{C})$ sind sowohl zu den Funktionen $\psi \in \mathcal{E}_{\mathbb{C}}^m(\Omega)$ mit der Eigenschaft $\psi(t + \alpha h) = (\frac{d^m}{d\xi^m} \psi)(t + \alpha h) = 0$ für $0 \leq \alpha \leq k$ als auch zu den monomialen Funktionen $\xi \mapsto (\xi - t)^v$ auf Ω für $0 \leq v \leq p + m - 1$ hinsichtlich der topologischen Dualität $(\mathcal{E}_{\mathbb{C}}^m(\Omega), \mathcal{E}_{\mathbb{C}}^m(\Omega))$ gleichzeitig orthogonal. Für seine Dimension sind die Schranken (3.13) gültig; im Falle $p + m \leq k + 2$ hat man insbesondere die Gleichung

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{E}_{t,h}^{m,p}(\Omega; \mathbb{C}) = 2(k+1) - p - m.$$

3.7. Wir wenden uns zweier naheliegender Folgerungen aus dem vorstehenden Satz zu, beschränken aber unsere Betrachtungen auf den besonders wichtigen Fall $m = 1$. Für $p = 2k$ folgt aus Satz 3-3, daß der komplexe Vektorraum $\mathcal{E}_{t,h}^{1,2k}(\Omega; \mathbb{C})$ mindestens eindimensional ist. Berücksichtigt man jedoch die Tatsache, daß die $(2k+2)$ -reihige quadratische Matrix mit den Zeilenvektoren $(u_v^*)_{0 \leq v \leq 2k+1}$ invertierbar ist - ihre Determinante verschwindet nicht als verallgemeinerte GRAM-Determinante der einfachen HERMITE-Interpolation innerhalb des Raumes $\mathcal{P}_{2k+1}(\Omega; \mathbb{C})$ in den $(k+1)$ äquidistanten Punkten $t + \alpha h$, $(0 \leq \alpha \leq k)$ -, so schließt man daraus, daß die Linearformenfamilie $\{u_v^* \in (F_1 \oplus F_2)^* \mid 0 \leq v \leq 2k\}$ notwendig über $\mathbb{C}$ den maximalen Rang $(2k+1)$ besitzen muß. Die Gleichung (3.12) liefert also das schärfere Resultat

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{E}_{t,h}^{1,2k}(\Omega; \mathbb{C}) = 1.$$

Weil jede nicht verschwindende DAHLQUIST-Distribution aus dem Raum $\mathcal{E}_{t,h}^{1,2k}(\Omega; \mathbb{C})$ den genauen Approximationsgrad $2k$ besitzt, können wir wie folgt zusammenfassen:

Korollar 1: Im Falle $m = 1$ existiert auf Ω zum Grundpunkt $t \in \Omega$ und zur Schrittweite $h > 0$ (bis auf einen Faktor) genau eine komplexe DAHLQUIST-Distribution der Schrittzahl $k \geq 1$, welche den Approximationsgrad $p = 2k$ aufweist.

Wir begnügen uns hier mit dieser reinen Existenzaussage, obschon - wir verweisen auf die Arbeit von G. DAHLQUIST [8] - eine explizite Konstruktion der DAHLQUIST-Distributionen des Raumes $\mathcal{D}_{t,h}^{1,2h}(\Omega; \mathbb{C})$ leicht durchführbar ist. Dies hat den folgenden Grund: Vom Standpunkt der Numerik aus verdienen DAHLQUIST-Distributionen mit einem "allzu hohen" Approximationsgrad kein besonderes Interesse, weil bei diesen die - an sich sehr erwünschte - Kleinheit des Diskretisierungsfehlers im einzelnen Schritt durch "Einbuße an Stabilität" erkaufte wird. Bei numerischer Integration über ein ausgedehntes Intervall kann sich dieser Mangel äußerst unangenehm bemerkbar machen; vergleiche Abschnitt 5.1. Genauer gesprochen: Weil aufgrund der DAHLQUIST-Theorie alle linearen Diskretisierungsalgorithmen, deren zugeordnete DAHLQUIST-Distributionen der Schrittzahl $k \geq 1$ einen Approximationsgrad $p > k + 2$ aufweisen, notwendig instabil sind, hat man sich, um besonders die optimalen linearen Algorithmen

erfassen zu können, auf die Betrachtung des Raumes $\mathcal{E}_{t,t}^{1,h+1}(\Omega; \mathbb{C})$ zu konzentrieren. Für dessen Dimension liefert aber Satz 3-3 unmittelbar die Gleichung

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{E}_{t,t}^{1,h+1}(\Omega; \mathbb{C}) = k .$$

Als Spezialfall des Satzes 3-3 erhält man demnach noch die folgende Aussage:

Korollar 2: Unter der Voraussetzung $m = 1$ existiert zu $k \geq 1$ beliebig vorgegebenen komplexen Zahlen genau eine komplexe DAHLQUIST-Distribution auf Ω mit der Schrittzahl k und dem Approximationsgrad $p \geq k + 1$, welche gerade diese als Koeffizienten besitzt.

Ein (wenig spezielleres) Analogon zu Korollar 2 hat G. DAHLQUIST [8] mit funktionentheoretischen Methoden, hauptsächlich unter Heranziehung eines konformen Isomorphismus der linken offenen Halbebene auf die offene Einheitskreisscheibe der komplexen Zahlenebene $\mathbb{C}$ bewiesen. Wir werden auf diesen Beweisgedanken im Abschnitt 5.4 im Zusammenhang mit dem Begriff der totalen Stabilität noch kurz zurückkommen und dort auch ein Anwendungsbeispiel für das Korollar 2 geben.

§ 4: Stationäre Punktprozesse

4.1. Im Rahmen der asymptotischen Stabilitätsuntersuchungen des nächsten Paragraphen ist der Grenzwert $h \rightarrow 0+$ für die Maschenweite h des der linearen Diskretisierung des komplexen Anfangswertproblems (AWP_m) zugrunde gelegten Gitters zu untersuchen. Die Anzahl der in das relativ kompakte Existenzintervall $\Omega \subset \mathbb{R}$ der exakten Lösung u fallenden Gitterknoten übertrifft also jede vorgegebene endliche Schranke. Aus diesem Grunde und weil o.B.d.A. im Anfangswertproblem (AWP_m) noch als Anfangsabszisse $a = 0$ angenommen werden darf, ist es zweckmäßig, bei den nachstehenden Überlegungen bei beliebig gewählter Gitterkonstante $h > 0$ ein offenes Intervall $\tilde{\Omega} \subset \mathbb{R}$ zu betrachten, das $\Omega \ni 0$ sowie die in $\mathbb{R}$ abgeschlossene, positive reelle Halbgerade $\mathbb{R}_+ = \{t \in \mathbb{R} \mid t \geq 0\}$ als einen, als "Zeitachse" zu interpretierenden lokalkompakten topologischen Raum (echt) umfaßt. Jede normiert vorausgesetzte komplexe DAHLQUIST-Distribution auf $\tilde{\Omega}$ der Ordnung $m \geq 1$ mit Grundpunkt $t \in \mathbb{R}_+$, Schrittzahl $k \geq 1$ und Schrittweite $h > 0$

$$\tau_{t,h}^m(\tilde{\Omega}; C) \ni T_{t,h} = \sum_{n=0}^h \alpha_n \varepsilon_{(t+n h)} - (-h)^m \cdot \sum_{n=0}^h \beta_n \partial^n \varepsilon_{(t+n h)}$$

setzt sich in eindeutig bestimmter Weise additiv aus zwei näher zu untersuchenden Anteilen zusammen, nämlich dem diskreten (skalaren) RADON-Maß $\sum_{n=0}^h \alpha_n \varepsilon_{(t+n, t)}$ aus dem Maßraum $\mathcal{M}_{\mathbb{C}}^c(\tilde{\Omega})$ als die kanonische Projektion von $T_{t,t} \in \mathcal{E}_{t,t}^m(\tilde{\Omega}; \mathbb{C})$ auf $\mathcal{E}_{t,t}^{0,0}(\tilde{\Omega}; \mathbb{C}) = E_0$ gemäß der direkten Summendarstellung (3.6) des $\mathbb{C}$ -Vektorraumes $\mathcal{E}_{t,t}^m(\tilde{\Omega}; \mathbb{C})$, und der Distribution m -ter Ordnung $-(-h)^m \cdot \sum_{n=0}^h \beta_n \mathcal{D}^m \varepsilon_{(t+n, t)}$ als zweite, dem Distributionenraum $\mathcal{E}_{\mathbb{C}}^m(\tilde{\Omega})$ angehörende Komponente, die wir auch den Störungsteil von $T_{t,t}$ nennen wollen. Der Störungsteil wird erst in den Konvergenzuntersuchungen des § 6 eine wesentliche Rolle spielen.

Über den Approximationsgrad der normierten komplexen DAHLQUIST-Distribution $T_{t,t}$ auf $\tilde{\Omega}$ werden wir im vorliegenden Paragraphen stets nur $p \geq 0$ voraussetzen. Damit ist also sicher die-Orthogonalität von $T_{t,t} \in \mathcal{E}_{t,t}^{m,0}(\tilde{\Omega}; \mathbb{C})$ im Sinne der topologischen Dualität $(\mathcal{E}_{\mathbb{C}}^m(\tilde{\Omega}), \mathcal{E}_{\mathbb{C}}^{\prime m}(\tilde{\Omega}))$ zum komplexen Vektorraum $\mathcal{P}_0(\tilde{\Omega}; \mathbb{C})$ der auf $\tilde{\Omega}$ global konstanten Funktionen für jeden beliebigen Grundpunkt $t \in \mathbb{R}_+$ gewährleistet. Mithin gilt (vgl. auch Satz 3-2) für die Summe der komplexen Gewichtungskoeffizienten $\sum_{n=0}^h \alpha_n = 0$. Das genannte diskrete RADON-Maß $\sum_{n=0}^h \alpha_n \varepsilon_{(t+n, t)}$ aus dem Raum $\mathcal{E}_{t,t}^{0,0}(\tilde{\Omega}; \mathbb{C})$ besitzt demnach auf $\tilde{\Omega}$ die Totalmasse 0. Wir setzen $\tilde{\alpha}_n = -\alpha_n$ für $0 \leq n \leq k-1$ und ordnen der normierten

DAHLQUIST-Distribution $T_{t,h} \in \mathcal{E}_{t,h}^{m,0}(\tilde{\Omega}; \mathbb{C})$ in jedem Grundpunkt

$$\mathbf{R}_+, \ni t = s - kh$$

als sog. Hauptteil das von ihrer Ordnung $m \geq 1$ unabhängige, komplexe diskrete RADON-Maß auf $\mathbf{R}_+$

$$(4.1) \quad \mathcal{M}_C^c(\mathbf{R}_+) \ni \lambda_{s,h} = \sum_{n=1}^h \tilde{\omega}_{h-n} \varepsilon_{(s-n)h}, \quad s \in [kh, +\infty[,$$

mit in der Punktmenge $\{s - kh, s - (k-1)h, \dots, s - h\}$ enthaltenem Träger und der Totalmasse $\langle \mathbf{1}_{\mathbf{R}_+}, \lambda_{s,h} \rangle = 1$ zu. Umgekehrt besitzt aufgrund des Korollars zu Satz 2-2 auch jedes nicht verschwindende komplexe RADON-Maß auf $\mathbf{R}_+$ mit in der Punktmenge $\{s - (k-n)h \mid 0 \leq n \leq k-1\}$ enthaltenem Träger bis auf eine homothetische Abbildung die Gestalt (4.1).

Mit der Bedeutung des Hauptteils der normierten DAHLQUIST-Distribution $T_{t,h} \in \mathcal{E}_{t,h}^{m,0}(\tilde{\Omega}; \mathbb{C})$ für die "interne Steuerung" des zur Familie $\{T_{t,h} \in \mathcal{E}_C^m(\tilde{\Omega}) \mid t \in \mathbf{R}_+\}$ gehörenden linearen Diskretisierungsalgorithmus auf $\tilde{\Omega}$ wollen wir uns im vorliegenden Paragraphen eingehender befassen. Bei reellem Grundkörper und falls, was vorläufig vorausgesetzt werden soll, zusätzlich noch $\alpha_n \leq 0$ gilt für $0 \leq n \leq k-1$, liegt

bei fest gewähltem $h > 0$ in $\{\lambda_{s,h} \in \mathcal{M}_R^c(\mathbb{R}_+), \{s \in [ht, +\infty[\}$ eine Familie von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf dem lokalkompakten topologischen Raum $\mathbb{R}_+$ vor. Diese wollen wir mit den Übergangswahrscheinlichkeiten einer stationären MARKOFF-Kette endlicher Stufe ("mit beschränkter Informationsspeicherung") in Zusammenhang bringen. Um dies genauer verfolgen zu können, sind aber einige vorbereitende integrations-theoretische Entwicklungen nötig, die im folgenden Abschnitt dargestellt werden.

4.2. Es bezeichne S eine beliebige nichtleere abgeschlossene Teilmenge des lokalkompakten topologischen Raumes $\mathbb{R}_+$ und für jedes fest gewählte $h > 0$ sei eine Abbildung

$$\Lambda_h: s \longmapsto \lambda_{s,h}$$

der Menge S in den konvexen Kegel $\mathcal{M}_R(\mathbb{R}_+)_+$ der positiven RADON-Maße auf der Zeitachse $\mathbb{R}_+$ vorgegeben, welche die nachstehenden Bedingungen erfüllen möge:

Die Abbildung $\wedge_*$ ist stetig hinsichtlich der von der vagen Topologie $\sigma(\mathcal{D}_R^{\circ}(\mathbb{R}_+), \mathcal{D}_R^{\circ}(\mathbb{R}_+))$ des reellen Vektorraumes $\mathcal{M}_R(\mathbb{R}_+)$ auf seinem Ordnungskegel $\mathcal{M}(\mathbb{R}_+)_+$ induzierten Relativtopologie (also insbesondere universell vage meßbar) und universell skalarwertig integrierbar, d.h. für jede Funktion $f \in \mathcal{D}_R^{\circ}(\mathbb{R}_+)$ und jedes vorgegebene, positive RADON-Maß $\mu \in \mathcal{M}_R(S)_+$ ist die reellwertige Funktion $s \mapsto \langle f, \lambda_{s,t} \rangle$ auf dem Raum S stets μ -integrierbar.

Für jeden Punkt $s \in S$ ist das positive RADON-Maß $\lambda_{s,t}$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf dem Raum $\mathbb{R}_+$. Dies bedeutet: Das Maß $\lambda_{s,t}$ ist auf $\mathbb{R}_+$ (DIFF2) beschränkt (d.h. $\mathbb{R}_+$ ist selbst eine $\lambda_{s,t}$ -integrierbare Menge), also ein Element aus dem topologischen Dual $\mathcal{M}_R^1(\mathbb{R}_+)$ des reellen BANACHschen Grundraumes $\mathcal{B}_R^{\circ}(\mathbb{R}_+)$ und besitzt die Totalmasse $\|\lambda_{s,t}\|_p = \langle 1_{\mathbb{R}_+}, \lambda_{s,t} \rangle = 1$.

Für die Träger der Maßfamilie $\wedge_*(S) = \{ \lambda_{s,t} \in \mathcal{M}_R^1(\mathbb{R}_+) \mid s \in S \}$ gilt die Inklusion (DIFF3) $\bigcup_{s \in S} \text{Supp}(\lambda_{s,t}) \subseteq S$, so daß für jeden Punkt $s \in S$ die offene Teilmenge $\bigcup_{\mathbb{R}_+} S$ von $\mathbb{R}_+$ eine $\lambda_{s,t}$ -Nullmenge ist: $\lambda_{s,t}(\bigcup_{\mathbb{R}_+} S) = 0$.

Die Eigenschaft (DIFF1) zieht insbesondere nach sich, daß $\Lambda_x: S \longrightarrow \mathcal{M}_{\mathbb{R}}^1(\mathbb{R}_+)$ hinsichtlich jedes vorgegebenen RADON-Maßes $\mu \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(S)_+$ eine μ -adäquate Abbildung ist. Mithin stellt also Λ_x - im Sinne der von G. CHOQUET geprägten Begriffsbildung - eine skalare Diffusion des lokalkompakten topologischen Raumes S in den lokalkompakten Raum $\mathbb{R}_+$ dar. Diese ist gemäß Voraussetzung (DIFF2) beschränkt und besitzt die Norm $\|\Lambda_x\| = \sup_{s \in S} \|\lambda_{s,x}\|_1 = 1$. Man vergleiche zum Diffusionsbegriff und den weiteren in diesem Abschnitt herangezogenen Begriffen aus der Theorie der Integration skalarer RADON-Maße besonders die Darstellung von N. BOURBAKI [5; Chap. V].

Um eine Interpretation der Diffusion Λ_x von S in $\mathbb{R}_+$ im Rahmen der Wahrscheinlichkeitstheorie zu geben, betrachten wir als Modellvorstellung ein Teilchen (einen Massenpunkt), das eine zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ beginnende eindimensionale Bewegung auf $\mathbb{R}_+$ ausführt. Wir deuten für jede universell meßbare (z.B. BORELSche) Teilmenge M von $\mathbb{R}_+$ die reelle Zahl $\lambda_{s,x}(M)$ mit $0 \leq \lambda_{s,x}(M) \leq 1$ als die Wahrscheinlichkeit dafür, daß das diffundierende Teilchen, falls es sich zum Zeitpunkt $t \in \mathbb{R}_+$ an der Stelle $s \in S$ befindet, zum Zeitpunkt $t + h$ in die Menge M übergeht; insbesondere

verschwindet demnach also das betrachtete Teilchen zum Zeitpunkt $t + h$ mit der Wahrscheinlichkeit

$1 - \lambda_{s,h}(\mathbf{R}_+) = 0$. Mit anderen Worten formuliert:

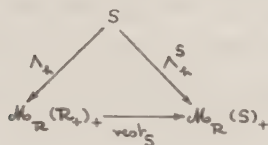
Die Familie $\bigwedge_h(S) = \{ \lambda_{s,h} \in \mathcal{M}_R^1(\mathbf{R}_+) \mid s \in S \}$ von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf $\mathbf{R}_+$ kann als die Familie der Übergangswahrscheinlichkeitsverteilungen eines stationären MARKOFF-Prozesses auf $\mathbf{R}_+$ (vgl. etwa J.L. DOOB [12; Chap. V, § 5]) gedeutet werden.

Wir wenden uns jetzt der Eigenschaft (DIFF3) der Diffusion $\bigwedge_h$ von S in $\mathbf{R}_+$ zu. Diese besagt offenbar gerade, daß die Massen der Maßfamilie $\bigwedge_h(S)$ auf der abgeschlossenen Teilmenge S von $\mathbf{R}_+$ konzentriert sind, d.h. das Komplement $\bigcup_{\mathbf{R}_+} S$ trägt keine Masse. Aus diesem Grunde liegt es nahe, der gegebenen Diffusion $\bigwedge_h$ die folgende restringierte Abbildung

$$\bigwedge_h^S: s \longmapsto \lambda_{s,h}^S$$

zuzuordnen, welche jedem Punkt $s \in S$ das vom positiven RADON-Maß $\lambda_{s,h} \in \mathcal{M}_R^1(\mathbf{R}_+)$ auf dem lokalkompakten Unterraum S von $\mathbf{R}_+$ induzierte Relativmaß $\text{rest}_S(\lambda_{s,h}) = \lambda_{s,h}^S \in \mathcal{M}_R(S)$ zuweist. Das folgende Dreiecks-

diagramm ist dann kommutativ:



Beachtet man die Tatsache, daß der universell meßbare Indikator χ_S der Menge S in $\mathbb{R}_+$ mit der konstanten Funktion $1_{\mathbb{R}_+}$ auf $\mathbb{R}_+$ $\lambda_{s,t}$ -fast überall übereinstimmt, also die beiden genannten Funktionen für jeden Punkt $s \in S$ auf $\mathbb{R}_+$ $\lambda_{s,t}$ -äquivalent sind und mithin die Identitäten

$$(4.2) \quad \langle 1_S, \lambda_{s,t}^S \rangle = \langle 1_{\mathbb{R}_+}, \chi_S \cdot \lambda_{s,t} \rangle = \langle \chi_S, \lambda_{s,t} \rangle = \langle 1_{\mathbb{R}_+}, \lambda_{s,t} \rangle = 1$$

gelten, so erkennt man, daß das positive Spurmaß

$\lambda_{s,t}^S$ ebenfalls für jedes $s \in S$ beschränkt ist und die Totalmasse $\|\lambda_{s,t}^S\|_p = 1$ besitzt. Außerdem ist für jedes vorgegebene positive RADON-Maß $\mu \in M_{\mathbb{R}}(S)_+$ auch die restringierte Abbildung $\wedge_t^S : S \longrightarrow M_{\mathbb{R}}^1(S)_+$ wieder μ -adäquat. Zusammenfassend ergibt sich also aus diesen Überlegungen der folgende

Satz 4-1: Die zur Diffusion $\wedge_t$ von S in $\mathbb{R}_+$ konstruierte restringierte Abbildung $\wedge_t^S$ ist eine beschränkte

Diffusion des lokalkompakten topologischen Raumes S in sich mit der Norm $\|\Lambda_t^S\| = 1$. Die Maßfamilie $\Lambda_t^S(S) = \{ \gamma_{s,t}^S \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}_+}^1(S)_+ \mid s \in S \}$ kann als die Familie der Übergangswahrscheinlichkeitsverteilungen eines stationären MARKOFF-Prozesses auf S interpretiert werden.

Es sei jetzt ein beliebiges Wahrscheinlichkeitsmaß $\mu \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}_+}^1(S)_+$ auf S vorgegeben, welches die Wahrscheinlichkeitsverteilung für die Ausgangsposition des im lokalkompakten topologischen Raum S diffundierenden Teilchens wiedergeben möge. Dann wird bekanntlich durch das μ -Integral

$$\mathcal{M}_{\mathbb{R}_+}^1(S)_+ \ni \mu^1 = \mu \Lambda_t^S = \int_S \gamma_{s,t}^S d\mu(s)$$

der Diffusion Λ_t^S , das wegen der Identität (4.2) offensichtlich die Totalmasse $\|\mu \Lambda_t^S\|_{\mathbb{R}_+} = 1$ besitzt und gerade die Einschränkung des μ -Integrals $\mu \Lambda_t^S = \int_S \gamma_{s,t}^S d\mu(s)$ von $\mathbb{R}_+$ auf S der ursprünglich betrachteten Diffusion Λ_t darstellt, die Wahrscheinlichkeitsverteilung für die Position des Massenpunktes in S nach genau einem aus der Startlage heraus erfolgten Übergang gegeben. Weil aber, wie in Satz 4-1 festgestellt, die Diffusion Λ_t^S von S in sich beschränkt ist, ist diese sicher mit sich selbst komponierbar.

Aufgrund der Gleichung von CHAPMAN-KOLMOGOROFF
gibt das positive RADON-Maß auf S

$$(4.3) \quad \mathcal{M}_R^1(S)_+ \ni \mu^n = \mu (\wedge_x^S)^n$$

für jedes Element n der multiplikativen Halbgruppe
 $N^* = N \setminus \{0\}$ die Wahrscheinlichkeitsverteilung für
die Position des Teilchens in der Menge S nach
genau n während seiner Bewegung ausgeführten stationären
Übergängen an. Wir nennen aus diesem Grunde
die lineare Abbildung $(\wedge_x^S)^n : \mu \mapsto \mu (\wedge_x^S)^n$ des
positiven konvexen Kegels $\mathcal{M}_R^1(S)_+$ in sich den zur
Diffusion $\wedge_x^S$ gehörenden n-ten Übergangsmorphismus
und können dann die Bedeutung der Gleichung (4.3)
auch folgendermaßen formulieren:

Die Folge $(\mu^n)_{n \in N^*}$ von Wahrscheinlichkeitsmaßen
auf dem lokalkompakten topologischen Raum S bildet
genau die Bahn des vorgegebenen positiven RADON-
Maßes $\mu \in \mathcal{M}_R^1(S)_+$ mit $\|\mu\|_p = 1$ unter der von rechts
auf der Menge der Wahrscheinlichkeitsmaße auf S
operierenden, vom Übergangsmorphismus $\wedge_x^S$ erzeugten
multiplikativen zyklischen Halbgruppe $\{(\wedge_x^S)^n \mid n \in N^*\}$.

Für die hier beabsichtigten Anwendungen der Diffu-
sionstheorie wird sich in erster Linie die zur

soeben konstruierten linearen Abbildung $\mu \mapsto \mu \wedge_k^S$ von $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}(S)_+$ in sich gebildete duale lineare Transformation als eigentlich wichtig erweisen. Sei $f \in \bigcap_{s \in S} L_{\mathbb{R}}^1(S, \lambda_{s,t} \wedge_k^S)$ eine beliebig vorgegebene Äquivalenzklasse auf S definierter, reellwertiger Funktionen. Dann gilt für die Äquivalenzklassen fast überall auf dem lokalkompakten topologischen Raum S definierter reeller Funktionen

$$(4.4) \quad \bigcap_{s \in S} L_{\mathbb{R}}^1(S, \lambda_{s,t}) \ni \wedge_k^S f : s \mapsto \langle f, \lambda_{s,t}^S \rangle = \int_S f d\lambda_{s,t}^S$$

und durch die dazugehörige Zuordnung

$$(4.5) \quad f \mapsto \wedge_k^S f$$

ist eine hinsichtlich der natürlichen Ordnungsstrukturen isotone $\mathbb{R}$ -lineare Abbildung des reellen Vektorraumes $\bigcap_{s \in S} L_{\mathbb{R}}^1(S, \lambda_{s,t} \wedge_k^S)$ in den reellen Vektorraum $\bigcap_{s \in S} L_{\mathbb{R}}^1(S, \lambda_{s,t}^S)$ definiert. Insbesondere stellt demnach also die Abbildung $f \mapsto \wedge_k^S f$ einen isotonen Endomorphismus des reellen Vektorraumes der Äquivalenzklassen auf dem Raum S fast überall definierter, universell integrierbarer reellwertiger (z.B. auf S beschränkter BORELScher) Funktionen dar. Eingeschränkt auf den spitzen, konvexen Ordnungskegel

$\mathcal{D}_{\mathbb{R}}^{\circ}(S)_+$ des reellen Vektorraumes $\mathcal{D}_{\mathbb{R}}^{\circ}(S)$ ist dieser

Endomorphismus gerade zur linearen Abbildung
 $\mu \longmapsto \mu \wedge^S_{\mathbf{t}}$ des konvexen Dualkegels $\mathcal{M}_{\mathbf{R}}(S)_+$ in sich
transponiert.

4.3. Zur Motivierung, hauptsächlich aber zur Veranschaulichung der weiteren Entwicklungen, bei denen wir uns vorerst ganz auf den reellen Fall beschränken wollen, betrachten wir zunächst einmal auf dem offenen Intervall $\tilde{\Omega} \subseteq \mathbf{R}$ nur die linearen Einschrittalgorithmen ($k = 1$) für das reelle Anfangswertproblem (AWP_t) und zwar auch unter diesen wieder nur den allereinfachsten Fall des Polygonzugverfahrens von EULER-CAUCHY, weil dann die Verhältnisse besonders leicht übersehbar werden. Der Hauptteil - im Sinne der in Abschnitt 4.1 gegebenen Definition - der zugehörigen reellen DAHLQUIST-Distribution $T_{t,t}$ erster Ordnung aus dem $\mathbf{R}$ -Vektorraum $\mathfrak{S}_{t,t}^{1,0}(\tilde{\Omega}; \mathbf{R})$ im Grundpunkt $t = s - h$, ($t \in \mathbf{R}_+$), besteht offensichtlich nur genau aus dem DIRAC-Maß $\lambda_{s,t} = \varepsilon_{(s-t)}$, $s \in [h, +\infty[$, auf dem lokalkompakten topologischen Raum $\mathbf{R}_+$. Wählen wir als die unseren Überlegungen des Abschnitts 4.2 zugrunde gelegte Menge S gerade die Spur des Gitters mit der Gitterkonstanten $h > 0$ auf der abgeschlossenen Zeitachse $\mathbf{R}_+$, d.h. also die abgeschlossene diskrete Unterhalbgruppe $S = h \cdot \mathbf{N}$ der additiven topologischen Halbgruppe $\mathbf{R}_+$, so liegt auf

der Hand, daß die wie folgt definierte Abbildung

$$(4.6) \quad \Lambda_x(o) = \varepsilon, \quad \Lambda_x: s \mapsto \varepsilon_{(s-x)} \quad \text{für } s \in h.N^x$$

der Menge S in den konvexen Kegel $M_{\mathbb{R}}^c(\mathbb{R}_+)_+$ die Bedingung (DIFF1) aus Abschnitt 4.2 erfüllt. Denn das Abbildungspaar, welches einerseits aus der Identität bzw. aus der Translation $s \mapsto s - h$ des diskreten topologischen Unterraumes S von $\mathbb{R}_+$ in sich und andererseits aus der konstanten Funktion 1_s auf S besteht, ist universell adaptiert auf S . Außerdem sind sicher auch die Bedingungen (DIFF2) und (DIFF3) erfüllt. Demnach ist die der vorgegebenen reellen Hyperdiffusion $\Delta'_x: t \mapsto T_{t,x}$ erster Ordnung von $\mathbb{R}_+$ in $\tilde{\Omega}$ zugeordnete Abbildung Λ_x insbesondere eine beschränkte Diffusion von S in $\mathbb{R}_+$, zu der sich (vgl. Satz 4-1) die restringierte Diffusion Λ_x^S von S in sich konstruieren läßt. Λ_x^S ist der Übergangsmorphismus einer unendlichen, stationären MARKOFF-Kette auf S ; der Zeitparameter t durchläuft dabei die additive, diskrete topologische Halbgruppe $S = h.N$ und die abzählbare Menge $\Lambda_x^S(S)$ äquidistant angeordneter Einheitsmassen auf S bildet die zugehörnde Familie der Übergangswahrscheinlichkeitsverteilungen. Wir nennen sie die vom EULER-CAUCHY-Algorithmus auf $\tilde{\Omega}$ induzierte stationäre MARKOFF-Kette auf S .

Beachtet man weiter die Tatsache, daß im vorliegenden Falle die beiden in Abschnitt 4.2 betrachteten reellen Vektorräume $\bigcap_{s \in S} L^1_{\mathbb{R}}(J, \chi^s_{s, \ell})$ und $\bigcap_{s \in S} L^1_{\mathbb{R}}(J, \chi^s_{s, \ell} \wedge \chi^s_{\ell})$ offenbar gerade mit dem über dem Körper $\mathbb{R}$ κ_0 -dimensionalen, mit der natürlichen Ordnung versehenen Produktvektorraum $\mathbb{R}^S$ zusammenfallen, so erkennt man, daß die lineare Abbildung $f \mapsto \bigwedge^s_x f$ ein isotoner Endomorphismus des reellen Zustandsraumes $\mathbb{R}^S$ der induzierten MARKOFF-Kette ist. Bezogen auf die kanonische Basis von $\mathbb{R}^S$ kann dieser Endomorphismus (vgl.(4.4)) durch die nachstehende Matrix mit abzählbar vielen Zeilen und Spalten repräsentiert werden, die mit Ausnahme der ersten unteren Nebendiagonale, in der durchweg Einsen stehen und einer Eins in der ersten Stelle der Hauptdiagonale, mit lauter Nullen besetzt ist:

$$(4.7) \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}.$$

Die spalten-stochastische Matrix tP (transponiert zur Matrix P) der zur induzierten unendlichen MARKOFF-Kette gehörenden stationären Übergangswahrscheinlichkeitsverteilungen spiegelt in ihrer Struktur die sich auch anschaulich - plausibel aus dem (wohl-determinierten)

Ablauf des EULER-CAUCHY-Algorithmus ergebende Tatsache wieder, daß - in der Sprache unserer Modellvorstellung ausgedrückt - die eindimensionale, zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ beginnende, unendliche Irrfahrt des durch die Teilmenge S von $\mathbb{R}_+$ hindurch diffundierenden Teilchens für $t > 0$ rein transitorisch ist, d.h. daß weder absorbierende Zustände vorliegen, wie dies beispielsweise bei Randwertproblemen stets der Fall ist, noch reflektierende Zustände vorhanden sind.

4.4. Die mit Hilfe der linearen Mehrschrittalgorithmen ($k > 1$) erzielte Genauigkeitssteigerung, d.h. die Verminderung ihres lokalen Diskretisierungsfehlers gegenüber dem manchen Einschrittverfahren - der zuvor betrachtete EULER-CAUCHY-Algorithmus besitzt wegen seiner Einfachheit in erster Linie theoretische Bedeutung, ist aber für praktische Anwendungen fast durchweg zu grob - beruht darauf, daß durch die Mehrschrittalgorithmen bei jedem Schritt für die Berechnung eines neuen Näherungswertes "Informationen" über eine beschränkte Anzahl der bereits schon ermittelten Näherungswerte herangezogen werden. Von dem hier eingenommenen Standpunkt der stochastischen Prozesse aus läßt sich, wie die nachstehenden Entwicklungen deutlich machen werden, dieser charakteristische Unterschied folgendermaßen präziser formulieren:

Satz 4-2: Die zu den reellen Hyperdiffusionen von $\mathbf{R}_+$ in $\tilde{\Omega}$ der linearen Einsrittalgorithmen ($k = 1$) auf $\tilde{\Omega}$ konstruierten und auf die der Diskretisierung zugrunde gelegten Gitterspur $S = h \cdot \mathbf{N}$ restringierten skalaren Diffusionen können als die Übergangsmorphismen unendlicher (klassischer) stationärer MARKOFF-Ketten erster Stufe mit die additive diskrete topologische Halbgruppe S durchlaufendem Zeitparameter t gedeutet werden. Die zu den reellen Hyperdiffusionen von $\mathbf{R}_+$ in $\tilde{\Omega}$ der linearen Mehrschrittalgorithmen ($k > 1$) auf $\tilde{\Omega}$ konstruierten, auf S restringierten vektoriellen Diffusionen lassen sich als die Übergangsmorphismen unendlicher stationärer MARKOFF-Ketten mit beschränktem Gedächtnis interpretieren.

Es ist bekannt, (vgl. J.L. DOOB [12 ; Chap. II, § 6]), daß sich jeder vorgegebene diskrete MARKOFF-Prozeß mit beschränktem Gedächtnis durch Bildung endlich-dimensionaler Produktvektorräume auf den klassischen Fall von diskreten Prozessen ohne Informationsspeicherung reduzieren läßt. Zu dieser Zurückführung ordnen wir im jetzt vorliegenden Falle $k > 1$ jedem Punkt s der in $\mathbf{R}_+$ abgeschlossenen, additiven diskreten topologischen Halbgruppe $S = h \cdot \mathbf{N}$ das folgende, auf dem lokalkompakten topologischen Raum $\mathbf{R}_+$ definierte,

vektorielle RADON-Maß

$$\vec{\lambda}_{s,h} = \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon_{(h)} \\ \vdots \\ \varepsilon_{((h-2)h)} \\ \varepsilon_{((h-1)h)} \end{bmatrix}, \quad \vec{\lambda}_{s,h} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{(s)} \\ \varepsilon_{(s+h)} \\ \vdots \\ \varepsilon_{(s+(h-2)h)} \\ \varepsilon_{(s+(h-1)h)} \end{bmatrix} \quad \text{für } s \in h \cdot \mathbf{N}^x$$

mit Werten im Raum $\mathbf{R}^h$ zu. Dabei ist das als k-te Koordinate des Vektors $\vec{\lambda}_{s,h}, (s \in h \cdot \mathbf{N}^x)$, auftretende positive skalare RADON-Maß $\lambda_{s+(h-1)h,h} \in \mathcal{M}_{\mathbf{R}}^c(\mathbf{R}_+)_+$ gerade der Hauptteil (4.1) der zum linearen k-Schrittalgorithmus auf $\tilde{\Omega}$ gehörenden normierten DAHLQUIST-Distribution $T_{t,h}$ aus dem $\mathbf{R}$ -Vektorraum $\mathcal{G}_{t,h}^{m,0}(\tilde{\Omega}; \mathbf{R})$ im Grundpunkt $t = s - h \in \mathbf{R}_+$ mit den (vgl. Abschnitt 4.1) als erfüllt angenommenen Voraussetzungen $\tilde{\alpha}_n = -\alpha_n \geq 0$ für $0 \leq n \leq k-1$ über sein Koeffizienten-k-tupel. An Stelle der skalaren Diffusion (4.6) von S in $\mathbf{R}_+$ beim EULER-CAUCHY-Algorithmus tritt also im Falle $k > 1$ die folgende, zur vorgegebenen reellen Hyperdiffusion $\Delta_h^m: t \mapsto T_{t,h}$ m-ter Ordnung von $\mathbf{R}_+$ in $\tilde{\Omega}$ konstruierte Abbildung

$$\vec{\Lambda}_h: s \mapsto \vec{\lambda}_{s,h}$$

der Menge S in den Ordnungskegel $\mathcal{M}_{\mathbf{R}}^c(\mathbf{R}_+)_+^h$ des mit der Produktordnung versehenen reellen Produktvektorraumes $\mathcal{M}_{\mathbf{R}}^c(\mathbf{R}_+)^h$. Man überzeugt sich leicht, daß die durch $\vec{\Lambda}_h$

definierten k Koordinatenabbildungen $\text{pr}_j \circ \vec{\Lambda}_k$,
 $(1 \leq j \leq k)$, des Raumes S in den spitzen konvexen
Kegel $\mathcal{M}_k^c(\mathbb{R}_+)$ wieder die in Abschnitt 4.2 ange-
gebenen Bedingungen (DIFF1), (DIFF2) und (DIFF3)
erfüllen. Aus diesem Grunde bezeichnen wir die Ab-
bildung $\vec{\Lambda}_k: S \longrightarrow \mathcal{M}_k^c(\mathbb{R}_+)^h$ als die zum linearen
 k -Schrittelalgorithmus (oder auch zur reellen Hyper-
diffusion Δ_k^r) gehörende vektorielle Diffusion
von S in $\mathbb{R}_+$. Insbesondere läßt sich also, indem
man jedem Punkt $s \in S$ das k -Tupel der von den k
Koordinatenmaßen des Vektors $\vec{\Lambda}_k(s) = \vec{\lambda}_{s,k}$ auf dem
lokal kompakten Unterraum S von $\mathbb{R}_+$ induzierten Relativ-
maße zuweist, ganz entsprechend die restringierte
vektorielle Diffusion $\vec{\Lambda}_k^S$ von S in sich konstruieren.
 $\vec{\Lambda}_k^S$ ist der Übergangsmorphismus einer vom linearen
 k -Schrittelalgorithmus auf $\tilde{\Omega}$ induzierten unendlichen
stationären MARKOFF-Kette auf S mit beschränktem
Gedächtnis, mit die additive diskrete topologische
Halbgruppe $S = h\mathbb{N}$ durchlaufendem Zeitparameter t
und der Familie $\vec{\Lambda}_k^S(\mathbb{C})$ vektorieller Übergangswahr-
scheinlichkeitsverteilungen.

Für jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ führen wir die k -punk-
tige Teilmenge $S_n = \{s \in S \mid hn \leq s \leq h(n+k-1)\}$
von S ein und setzen $E_n = \mathbb{R}^{S_n}$ fest; dem k -dimensiona-
len reellen Vektorraum E_n möge die Produktordnung

aufgeprägt sein. Dann ist durch $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Überdeckung der Menge S und durch $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge algebraisch und ordnungstheoretisch isomorpher $\mathbb{R}$ -Vektorräume gegeben, die sich mit dem Raum $\mathbb{R}^h$ identifizieren lassen. Durch die Abbildung τ weisen wir jedem Punkt $s \in S$ eindeutig ein k -Tupel $\tilde{s}$ von Elementen aus S zu gemäß

$$\tau : s \mapsto \tilde{s} = (s, s + h, \dots, s + (k-1)h)$$

und setzen $\tilde{S} = \tau(S)$. Dann ist $\tau : S \rightarrow \tilde{S}$ eine Bijektion, die natürlich für $k = 1$ mit der identischen Permutation der Menge S zusammenfällt. Jeder vorgegebenen Abbildung $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ ordnen wir ferner die folgende Abbildung $\tilde{\tau}(f) : \tilde{S} \rightarrow \mathbb{R}^h$ zu:

$$\tilde{\tau}(f) : s \mapsto \begin{bmatrix} f(s) \\ f(s+h) \\ \vdots \\ f(s+(k-1)h) \end{bmatrix},$$

so daß für jedes Element $f \in \mathbb{R}^S$ das nachstehende Vierecksdiagramm kommutativ ist:

$$\begin{array}{ccc} \tilde{S} & \xrightarrow{\tau} & S \\ \tilde{\tau}(f) \downarrow & & \downarrow f \\ \mathbb{R}^h & \xrightarrow{pr_1} & \mathbb{R} \end{array}$$

Nach kanonischer Identifizierung der Vektorräume $(\mathbf{R}^k)^{\tilde{S}}$ und $\prod_{n=0}^{\infty} E_n$ wird durch die Abbildung $f \longmapsto \tilde{f}(f)$ ein injektiver algebraischer und ordnungstheoretischer $\mathbf{R}$ -Homomorphismus des Vektorraumes $\mathbf{R}^S$ in den geordneten Produktvektorraum $\prod_{n=0}^{\infty} E_n$ definiert. Setzt man für jedes Paar $(n_1, n_2) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}$ natürlicher Zahlen $S_{n_1, n_2} = S_{n_1} \cap S_{n_2}$ fest und bezeichnet man mit $F = \text{Im } \tilde{f}$ den Bildraum des Homomorphismus $\tilde{f}$, so gilt offenbar die folgende Darstellung

$$F = \text{Im } \tilde{f} = \left\{ f \in \prod_{n=0}^{\infty} E_n \mid p_{n_1}(f) \mid S_{n_1, n_2} = p_{n_2}(f) \mid S_{n_1, n_2} \text{ für alle } (n_1, n_2) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N} \right\}.$$

Versieht man den Untervektorraum F von $\prod_{n=0}^{\infty} E_n$ mit der induzierten Ordnungsstruktur, so ist mithin durch $\tilde{f} : \mathbf{R}^S \longrightarrow F$ ein algebraischer und ordnungstheoretischer Isomorphismus gegeben. Im Falle $k = 1$ reduziert sich dieser gerade auf den identischen Automorphismus des geordneten Produktvektorraumes $\mathbf{R}^S$. Weil bei den linearen Mehrschrittalgorithmen der k_0 -dimensionale reelle Vektorraum F die Rolle von $\mathbf{R}^S$ zu übernehmen hat, ist im vorliegenden Falle ($k > 1$) die Abbildung (4.5) durch die analog definierte lineare Abbildung

$$(4.8) \quad F \ni f \longmapsto \tilde{\Lambda}_k^S f : \tilde{f} \longmapsto \langle \tilde{f}(f), \tilde{\chi}_{\tilde{f}(\tilde{S}), k}^S \rangle = \int_S \tilde{f}(f) d\tilde{\chi}_{\tilde{f}(\tilde{S}), k}^S$$

zu ersetzen; $f \mapsto \vec{\Lambda}_k^s f$ ist ein isotoner Endomorphismus des geordneten $\mathbf{R}$ -Vektorraumes F . Führt man in jedem Faktorraum E_n , ($n \in \mathbf{N}$), - den wir im Rahmen unserer Modellvorstellung auch als den n-ten Erinnerungsraum der induzierten stationären MARKOFF-Kette auf S bezeichnen wollen - des Produktvektorraumes $\prod_{n=0}^{\infty} E_n$ die zugehörige kanonische Basis ein und legt man in $\prod_{n=0}^{\infty} E_n$ selbst die aus diesen endlichen Basen zusammengesetzte Basis zugrunde, so kann, wie sich direkt aus der Definition (4.8) ergibt, der konstruierte Endomorphismus $f \mapsto \vec{\Lambda}_k^s f$ von F durch die nachstehende Blockmatrix $\tilde{P}$ mit abzählbar vielen Zeilen und Spalten und der charakteristischen Struktur dargestellt werden: $\tilde{P}$ besteht aus lauter Nullblöcken O_k mit Ausnahme der k -reihigen Einheitsmatrix 1_k , die als erster Block auf der Hauptdiagonale steht, und einer abzählbaren Familie identischer k -reihiger quadratischer Matrizen $\tilde{P}_k$, die längs der ersten unteren Nebendiagonale als Blöcke aufgereiht sind:

$$\tilde{P} = \begin{bmatrix} 1_h & 0_h & 0_h & 0_h & \dots \\ \tilde{p}_h & 0_h & 0_h & 0_h & \dots \\ 0_h & \tilde{p}_h & 0_h & 0_h & \dots \\ 0_h & 0_h & \tilde{p}_h & 0_h & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

Die Matrix $\tilde{P}_h$ besitzt gemäß (4.8) die bekannte Form (vgl. etwa O.B. WIDLUND [32]) einer (von h unabhängigen) k-reihigen quadratischen oberen FROBENIUS-Matrix mit dem Gewichte-k-tupel $(\tilde{\alpha}_0, \tilde{\alpha}_1, \dots, \tilde{\alpha}_{h-1})$ als k-te Zeile:

$$(4.9) \quad \tilde{P}_h = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ \tilde{\alpha}_0 & \tilde{\alpha}_1 & \tilde{\alpha}_2 & \tilde{\alpha}_3 & \dots & \tilde{\alpha}_{h-1} \end{bmatrix}$$

Aus der Gestalt der Matrix $\tilde{P}_h$ kann man insbesondere erkennen, daß sich im Falle $k = 1$ die Blockmatrix $\tilde{P}$ gerade auf die triviale, in Abschnitt 4.3 für den EULER-CAUCHY-Algorithmus angegebene Matrix (4.7) reduziert.

Bildet man die stochastische Matrix ${}^t\tilde{P}$, in der also längs der ersten oberen Nebendiagonale die

transponierten Blöcke ${}^t\tilde{P}_n$ aufgereiht sind und welche die zur induzierten unendlichen stationären MARKOFF-Kette auf S mit beschränkter Informationsspeicherung gehörenden Übergangswahrscheinlichkeitsverteilungen angibt, so entnimmt man der Struktur dieser Matrix die wiederum aus dem Ablauf der linearen Mehrschrittalgorithmen her anschaulich einleuchtende Tatsache, daß in jedem Erinnerungsraum E_n , ($n \in \mathbb{N}^*$), zu den vergangenen $(k - 1)$ Zeitpunkten $h_n, h(n + 1), \dots, h(n + k - 2)$ lauter rein transitorische, den "Informationsfluß" durch den Erinnerungsraum E_n hindurch charakterisierende Zustände der MARKOFF-Kette vorliegen. Das Koeffizienten- k -tupel des Hauptteils $\lambda_{h_n + (k-1)h, h_n}$ der zugehörigen normierten DAHLQUIST-Distribution, d.h. der Wahrscheinlichkeitsvektor $(\tilde{\alpha}_0, \tilde{\alpha}_1, \dots, \tilde{\alpha}_{k-1})$, gibt dabei die Austrittswahrscheinlichkeitsverteilungen aus E_n , also die stationären Wahrscheinlichkeitsverteilungen für den Übergang des zum Zeitpunkt $h_n + (k - 1)h$ herrschenden Zustandes aus dem Erinnerungsraum E_n heraus in den gegenwärtigen Zustand an.

Für jedes Element $f \in F$ nennen wir die kanonische Projektion $f_n = pr_n(f)$ von f auf den Erinnerungsraum E_n , ($n \in \mathbb{N}$), den n -ten Erinnerungsvektor von f .

Ferner nennen wir die k -reihige quadratische stochastische Matrix $\tilde{P}_k$ die Teilübergangsmatrix der induzierten unendlichen stationären MARKOFF-Kette auf S , obwohl diese Bezeichnung eigentlich genauer der transponierten Matrix ${}^t\tilde{P}_k$ zukommen sollte. Dann gilt (vgl. Abschnitt 4.2) in Dualität zur Gleichung (4.3) von CHAPMAN-KOLMOGOROFF der folgende

Satz 4-3: Für jedes vorgegebene Element $f \in F$ ist der n -te Erinnerungsvektor $f_n \in E_n$, ($n \in \mathbf{N}$), von f mit dem Startvektor $f_0 \in E_0$ über die Teilübergangsmatrix $\tilde{P}_k$ der vom linearen Mehrschrittalgorithmus auf $\tilde{\Omega}$ induzierten stationären MARKOFF-Kette auf S durch die Gleichung

$$(4.10) \quad f_n = \tilde{P}_k^n f_0, \quad (n \in \mathbf{N}),$$

verknüpft, d.h. die Folge $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ von Erinnerungsvektoren bildet genau die Bahn des Startvektors f_0 unter der von links auf dem Vektorraum E_0 operierenden, von der Matrix $\tilde{P}_k$ erzeugten, multiplikativen zyklischen Halbgruppe $\{\tilde{P}_k^n \mid n \in \mathbf{N}\}$.

4.5. Befreit man sich von der in Abschnitt 4.1 getroffenen Voraussetzung und läßt für die Koeffizienten α_n , ($0 \leq n \leq k-1$), der normierten DAHLQUIST-

Distribution $T_{t,t}$ auf $\tilde{\Omega}$ mit Grundpunkt $t \in \mathbb{R}_+$, auch beliebige Vorzeichen oder im Falle des komplexen Anfangswertproblems (AWP_m) sogar komplexe Zahlen zu, fordert also lediglich $T_{t,t} \in \mathcal{G}_{t,t}^{m,0}(\tilde{\Omega}; \mathbb{C})$, so daß die quadratische Teilübergangsmatrix $\tilde{P}_h$ nicht mehr notwendig stochastisch ist, so bleiben, da im vorliegenden Paragraphen in integrations-theoretischer Hinsicht ja lediglich DIRAC-Maße auf $\mathbb{R}_+$ und (endliche) Linearkombinationen von solchen DIRAC-Maßen eine Rolle spielen, die Überlegungen dieses Paragraphen nach sinngemäßer Übertragung, insbesondere also unter Beiseitelassung aller sich auf Anordnungseigenschaften beziehender Aussagen, und natürlich unter Verzicht auf eine Interpretation im Rahmen wahrscheinlichkeitstheoretischer Modellvorstellungen, auch weiterhin gültig. Insbesondere bleibt auch die volle Gültigkeit von Satz 4-3 gesichert. Statt von einer stationären MARKOFF-Kette mit beschränktem Gedächtnis sprechen wir im so erweiterten Sinne von dem vom linearen Mehrschrittalgorithmus auf $\tilde{\Omega}$ induzierten stationären Punktprozeß auf S . In einer späteren Arbeit soll auf die Theorie dieser Prozesse ausführlicher eingegangen werden.

Satz 4-3 zeigt, daß das asymptotische Verhalten der Vektorfolge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, im Raum $E = \mathbb{C}^h$ betrachtet,

bei beliebig vorgegebenem Ausgangsvektor $\{.$ und fest gewählter Schrittweite $h > 0$ eng mit dem Verhalten der Matrixpotenzen $\tilde{P}_h^n$ entlang des Elementarfilters von $\mathbf{N}$ zusammenhängt, also, wie aus der Theorie der Verzweigungsprozesse und aus der funktionalanalytischen Ergodentheorie bekannt ist, mit den Spektraleigenschaften der Teilübergangsmatrix $\tilde{P}_h$. Die im nächsten Paragraphen vorzunehmende Untersuchung dieses Verhaltens wird zu verschiedenen numerischen Stabilitätsbegriffen bei linearen Mehrschrittalgorithmen führen. Dabei erweist es sich, daß gerade auch im Hinblick auf das Stabilitätsverhalten der in diesem Paragraphen zunächst in den Vordergrund gerückte Sonderfall eines stationären Punktprozesses mit stochastischer Teilübergangsmatrix bzw. die linearen Diskretisierungsalgorithmen, welche Punktprozesse dieser Art induzieren, ein eigenes Interesse verdienen. Wir werden in Abschnitt 5.5 im Zusammenhang mit dem Begriff der absoluten Stabilität auf diesen Sachverhalt noch kurz zu sprechen kommen.

§ 5: Numerische Stabilität

5.1. Die Präzisierungen und Untersuchungen verschiedenartiger numerischer Stabilitätsbegriffe für die linearen Diskretisierungsalgorithmen zum reellen Anfangswertproblem (AWP_r) nahmen ihren Ausgangspunkt von den grundlegenden Arbeiten J. TODDS [31] und vor allem H. RUTISHAUSERS [25]. An Hand gewöhnlicher reeller linearer Differentialgleichungen einfachster Bauart wies H. RUTISHAUSER auf die bemerkenswerte Tatsache hin, daß, falls die (reellen) Koeffizienten der zugrunde gelegten linearen Differenzengleichung nicht über die durch den TAYLOR-Abgleich geforderten Bedingungen hinaus noch zusätzlich sog. Stabilitätsbedingungen erfüllen, die gesuchte numerische Näherungslösung durch den Einfluß von - wie G. DAHLQUIST sei sehr prägnant bezeichnet - eingeschleppten Parasitärlösungen mit sehr schnellem Wachstum derart verfälscht werden kann, daß sie in ihrem "Verlauf" nichts mehr mit der exakten Lösungsfunktion u von (AWP_r) gemeinsam hat. Verwandte Betrachtungen dieser Richtung finden sich auch bei W. QUADE [20].

Von den daran anknüpfenden vielfältigen Untersuchungen zu diesem Themenkreis brachten namentlich die Arbeiten von G. DAHLQUIST [8], [9], [10] bedeutsame Fortschritte und zwar in dreierlei Hinsicht: Einmal wurde durch seinen allgemeinen, in § 3 aus distributionentheoretischen Erwägungen heraus entwickelten Ansatz die Theorie der linearen Diskretisierungsalgorithmen auf eine neue, breite Grundlage gestellt, die es erlaubte, diese Theorie in sich geschlossen darzustellen; zum andern verschärfte G. DAHLQUIST noch auf eine den praktischen Anwendungen besonders gut angepaßte Weise den Stabilitätsbegriff im Sinne von H. RUTISHAUSER und lieferte drittens eine wesentliche Weiterentwicklung der Theorie durch seine tiefgreifende und heute bereits weitgehend abgeschlossene Analyse des Zusammenhanges zwischen numerischer Stabilität und Approximationsgrad. Man vergleiche hierzu auch die sehr interessanten, von HULL-LUXEMBURG [16] dargelegten Beziehungen zwischen der DAHLQUIST-Theorie und den Existenzsätzen für Anfangswertprobleme gewöhnlicher reeller Differentialgleichungen erster Ordnung.

Das Ziel des vorliegenden Paragraphen besteht darin, mit Hilfe des in § 4 eingeführten Begriffs des induzierten stationären Punktprozesses Zugang zu verschiedenartigen numerischen Stabilitätsbegriffen bei linearen Diskretisierungsalgorithmen für das komplexe Anfangswert-

problem (AWP_m) zu gewinnen und einige Aspekte ihrer Theorie zusammen mit naheliegenden Verallgemeinerungen von einem einheitlichen Gesichtspunkt aus neu zu entwickeln.

5.2. Wir ließen in § 4 bei fest gewählter Schrittweite $h > 0$ den Grundpunkt s des mit Hilfe des diskreten Hauptteils - aus dem Raum $\mathcal{M}_C^c(\mathbb{R}_+)$ - der komplexen DAHLQUIST-Distribution $T_{t,k} \in \mathcal{T}_{t,k}^{m,0}(\tilde{\Omega}; \mathbb{C})$ der Ordnung $m \geq 1$ mit Grundpunkt $t \in \mathbb{R}_+$ und Schrittzahl $k \geq 1$ gebildeten vektoriellen RADON-Maßes $\vec{\lambda}_{s,k} \in \mathcal{M}_C^c(\mathbb{R}_+)^h$ die unendliche Gitterspur $S = h \cdot \mathbb{N}$ auf $\mathbb{R}_+$ durchlaufen. Durch Konstruktion (vgl. Abschnitt 4.4) der der komplexen Hyperdiffusion $\Delta_k^m : t \mapsto T_{t,k}$ m -ter Ordnung von $\mathbb{R}_+$ in $\tilde{\Omega}$ zugeordneten restringierten vektoriellen Diffusion $\vec{\Lambda}_k^s$ von S in sich wurden wir fast zwangsläufig zum Begriff des (vom auf $\tilde{\Omega}$ betrachteten) linearen Diskretisierungsalgorithmus induzierten stationären Punktprozesses auf S geführt. Wir variieren jetzt außer dem Grundpunkt $s \in S$ auch noch die Schrittweite h in der offenen rechten reellen Halbgerade $]0, +\infty[\subset \mathbb{R}_+$ und untersuchen das "asymptotische" Verhalten des Punktprozesses beim Grenzübergang $h \rightarrow 0+$. Dazu ist zunächst zu beachten, daß natürlich die durch den induzierten Punktprozeß "erzeugten" Vektoren $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von der jeweils gewählten Schrittweite $h > 0$ abhängig

sind; wir wollen im folgenden diese Abhängigkeit durch die Notation f_n^k noch besonders hervorheben. Die Vektoren $(f_n^k)_{n \in \mathbb{N}}$ fassen wir als Elemente des k -dimensionalen komplexen Vektorraumes $E = \mathbb{C}^k$ auf, dessen kanonische Produkttopologie durch die Norm $f \mapsto \|f\|$ induziert werden möge. Außerdem führen wir noch für jedes reelle $b > 0$ die natürliche Zahl

$$(5.1) \quad N_b^k = \sup \left(\left\lfloor \frac{b}{h} \right\rfloor - k + 1, 0 \right)$$

ein, so daß bei hinreichend kleiner Maschenweite $h > 0$ durch $N_b^k + k - 1$ die Anzahl der in das kompakte Intervall $[0, b] \subset \mathbb{R}_+$ fallenden Gitterpunkte der Distanz h angegeben wird (in Abschnitt 4.1 wurde $a = 0$ als Anfangsabszisse vereinbart!).

Wir stellen die folgenden Definitionen als Ausgangspunkt für unsere weiteren Überlegungen voran:

Es sei $l \geq 1$ eine natürliche Zahl. Ein stationärer Punktprozeß auf S im Sinne des § 4 wird asymptotisch l -stabil genannt, falls zu jedem beliebig vorgegebenen $\eta > 0$ mit der Eigenschaft, daß die Abbildung $h \mapsto f_h^k$ von $[0, \eta] \subset \mathbb{R}_+$ in E gleichmäßig normbeschränkt ist, ein $\delta > 0$ existiert, so daß für jede

Zahl $\ell > 0$ die Abbildung $h \mapsto \sup_{0 \leq n \leq N_\ell^k} h^{1-\ell} \|f_n^k\|$
 von $]0, \delta] \subset \mathbb{R}_+$ in $\mathbb{R}_+$ durch eine (noch von ℓ ab-
 hängige) Schranke gleichmäßig (nach oben) be-
 schränkt wird.

Ein linearer Diskretisierungsalgorithmus für das
 komplexe Anfangswertproblem (AWP_m) heißt genau
 dann numerisch ℓ -stabil, falls der induzierte
 stationäre Punktprozeß im soeben definierten Sinne
 asymptotisch ℓ -stabil ist.

Der hier betrachtete asymptotische Stabilitätsbe-
 griff bezüglich der Gewichtsfunktion $h \mapsto h^{1-\ell}$
 auf $]0, +\infty[$ kann - grob gesprochen - wie folgt
 interpretiert werden: Bei numerischer Integration
 des komplexen Anfangswertproblems m-ter Ordnung
 (AWP_m) über ein beliebiges abgeschlossenes Teil-
 intervall $[0, b]$ des kompakten Existenzintervalles
 $\bar{\Omega} \subset \mathbb{R}$ der exakten Lösungsfunktion u soll der durch
 den zugrunde gelegten linearen Diskretisierungs-
 algorithmus induzierte stationäre Punktprozeß bei
beliebig vorgenommener Verkleinerung der Schritt-
weite $h > 0$ (und der natürlich dadurch bedingten be-
 liebigen Vergrößerung der Anzahl N_ℓ^k der im Inter-
 vall $[0, b]$ auszuführenden Integrationsschritte)
 aus k gleichmäßig beschränkten Startwerten - die ja

für jede gewählte Schrittweite h zuerst noch im Rahmen einer gesonderten Anlaufrechnung (Startprozedur) bereitgestellt werden müssen -, eine Folge von Werten liefern, deren "asymptotisches Wachstumsverhalten" in $[0, b]$ für $h \rightarrow 0$ im wesentlichen durch die reziproke Gewichtsfunktion $h \mapsto \frac{1}{h^{1-\alpha}}$ auf $]0, +\infty[$ bestimmt wird. Man beachte insbesondere auch die wichtige Tatsache, daß die Störungsteile der Familie komplexer DAHLQUIST-Distributionen $\Delta_h^m(\mathbb{R}_+) = \{T_{s,h} \in \mathcal{E}'^m(\tilde{\Omega}) \mid t \in \mathbb{R}_+\}$ in die obige Stabilitätsdefinition nicht eingehen, sondern lediglich -, über den induzierten stationären Punktprozeß - ihre Hauptteile $\{\lambda_{s,h} \in \mathcal{M}_C^c(\mathbb{R}_+)\}$ $s \in [kh, +\infty[$.

Wir definieren auf der nichtkommutativen komplexen Algebra $\text{Mat}_n(\mathbb{C})$ der k -reihigen quadratischen Matrizen mit komplexen Elementen eine Norm $A \mapsto \|A\|$ derart, daß einmal $\text{Mat}_n(\mathbb{C})$ zu einer komplexen BANACH-Algebra wird und zum anderen, daß diese Norm mit der (ebenso bezeichneten) Vektornorm des komplexen BANACH-Raumes E verträglich ist; darüber hinaus kann sie ganz beliebig gewählt werden. Für jede Schrittweite $h > 0$ und jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ führen wir ferner die aus der Teilübergangsmatrix (4.9) des induzierten stationären Punktprozesses

gewonnene komplexe Matrix

$$(5.2) \quad B_{l,n}(h) = h^{l-1} \tilde{P}_n^l, \quad h \in]0, +\infty[,$$

aus der Algebra $\text{Mat}_n(\mathbb{C})$ ein. Aufgrund von Satz 4-3 ergibt sich dann die folgende, für die weiteren Entwicklungen dieses Paragraphen zentrale Charakterisierung der numerischen l -Stabilität:

Satz 5-1: Ein linearer Diskretisierungsalgorithmus für das komplexe Anfangswertproblem (AWP_m) ist genau dann numerisch l -stabil, ($l \geq 1$), falls ein $\delta_0 > 0$ existiert, so daß für jede Zahl $l > 0$ die gemäß Gleichung (5.2) konstruierte Familie von Matrizen $\{ B_{l,n}(h) \in \text{Mat}_n(\mathbb{C}) \mid h \in]0, \delta_0] , 0 \leq n \leq N_l^h \}$ durch eine (noch von l abhängige) Schranke gleichmäßig normbeschränkt wird.

Anmerkung: Wir haben Satz 5-1 ohne genauere Spezifizierung der zugrunde liegenden Matrizenorm formuliert. Dies wird durch die Tatsache gerechtfertigt, daß sich jede Norm auf der $\mathbb{C}$ -Algebra $\text{Mat}_n(\mathbb{C})$ durch jede beliebige andere Norm auf $\text{Mat}_n(\mathbb{C})$ majorisieren läßt und zwar mit Hilfe eines Faktors > 0 , welcher lediglich von den beiden betrachteten Matrizenormen abhängt. Dies ergibt sich aber wiederum einfach daraus,

daß, weil ja die Algebra $\text{Mat}_k(\mathbb{C})$ über dem vollständig bewerteten Körper $\mathbb{C}$ den (endlichen) Rang k^2 besitzt, nach dem Isomorphiesatz von A. TYCHONOFF je zwei Normen auf $\text{Mat}_k(\mathbb{C})$ dieselbe hausdorffsche lokalkonvexe Vektorraumtopologie induzieren, nämlich genau die kanonische Produkttopologie, und mithin äquivalent sind. Die letzte Aussage ist aber gerade mit der nachzuweisenden Majorisierungseigenschaft gleichwertig. Man vergleiche zu diesen Überlegungen auch die (keine Hilfsmittel aus der allgemeinen Theorie der topologischen Vektorräume heranziehenden) Untersuchungen von A. OSTROWSKI [19] über Matrizennormen.

Beweis zu Satz 5-1: (i) Es liegt auf der Hand, daß die im Satz angegebene Bedingung hinreichend ist für die l -Stabilität, denn es gilt ja für jede natürliche Zahl n und, falls man $\delta = \inf(\gamma, \delta_0) > 0$ setzt, auch für jede Schrittweite $h \in]0, \delta] \subset \mathbb{R}_+$ aufgrund von Gleichung (4.1c) und der vorausgesetzten Verträglichkeit der beiden von E und $\text{Mat}_k(\mathbb{C})$ getragenen Normen die einfache Abschätzung

$$h^{l-1} \cdot \| \xi_n^k \| = \| B_{l,n}(h) \cdot \xi_0^k \| \leq \| B_{l,n}(h) \| \cdot \| \xi_0^k \|.$$

(ii) Um umgekehrt den Nachweis für die Notwendigkeit der im Satz genannten Bedingung zu führen, ist es bequem, neben $\text{Mat}_n(\mathbb{C})$ die komplexe Algebra $\mathcal{L}_{\mathbb{C}}(E) = \text{End}_{\mathbb{C}}(E)$ der (notwendig normstetigen) Endomorphismen des k -dimensionalen komplexen BANACH-Raumes E zu betrachten. Auf $\mathcal{L}_{\mathbb{C}}(E)$ sei die übliche Norm

$$(5.3) \quad v \longmapsto \|v\|_{\beta} = \sup_{\substack{f \in E \\ \|f\| \leq 1}} \|v \cdot f\|$$

definiert, durch welche $\mathcal{L}_{\mathbb{C}}(E)$ die Struktur einer nichtkommutativen komplexen BANACH-Algebra aufgeprägt wird. Nach Auszeichnung einer beliebigen Basis (z.B. der kanonischen) im k -dimensionalen $\mathbb{C}$ -Vektorraum E kann $\mathcal{L}_{\mathbb{C}}(E)$ auf die komplexe BANACH-Algebra $\text{Mat}_n(\mathbb{C})$ algebren-isomorph abgebildet werden. Die auf dem Isomorphiesatz von A. TYCHONOFF beruhenden Überlegungen der obigen Anmerkung zeigen ferner, daß dieser $\mathbb{C}$ -Isomorphismus τ sogar normtopologisch, aber natürlich nicht notwendig eine lineare Isometrie von $\mathcal{L}_{\mathbb{C}}(E)$ auf $\text{Mat}_n(\mathbb{C})$ ist. Mit $v_{n,1}(h) \in \mathcal{L}_{\mathbb{C}}(E)$ werde derjenige Endomorphismus von E bezeichnet, welcher unter $\tau : \mathcal{L}_{\mathbb{C}}(E) \longrightarrow \text{Mat}_n(\mathbb{C})$ der Matrix $B_{n,1}(h) \in \text{Mat}_n(\mathbb{C})$ zugeordnet wird. Der Voraussetzung entnimmt man dann, daß bei vorgegebenem $\epsilon > 0$ die Familie $\mathcal{V} = \{ v_{n,1}(h) \in \mathcal{L}_{\mathbb{C}}(E) \mid h \in]0, \delta], 0 \leq n \leq N_{\epsilon}^k \}$ normstetiger Endomorphismen von E sicher

hinsichtlich der Topologie der punktweisen Konvergenz von $\mathcal{L}_{\mathbb{C}}(E)$ beschränkt ist. Eine erneute Anwendung des Isomorphiesatzes von A. TYCHONOFF liefert die Tatsache, daß wegen $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}_{\mathbb{C}}(E) = \dim_{\mathbb{C}} \text{Mat}_k(\mathbb{C}) = k^1 < +\infty$ und weil der Körper $\mathbb{C}$ eine vollständige Bewertung trägt, die Topologie der punktweisen Konvergenz von $\mathcal{L}_{\mathbb{C}}(E)$, die ja (vgl. N. BOURBAKI [4; Chap. III]) offenbar die grösste unter den $\mathcal{T}$ -Topologien von $\mathcal{L}_{\mathbb{C}}(E)$ darstellt ($\mathcal{T}$ bezeichnet dabei eine beliebige Menge beschränkter Teile von E , deren Vereinigung im BANACH-Raum E total liegt), mit der feinsten unter allen $\mathcal{T}$ -Topologien von $\mathcal{L}_{\mathbb{C}}(E)$, nämlich der Topologie der beschränkten Konvergenz zusammenfällt. Denn bei jeder zulässigen $\mathcal{T}$ -Topologie handelt es sich ja um eine separierte lokalkonvexe Vektorraumtopologie auf $\mathcal{L}_{\mathbb{C}}(E)$. Die Topologie der beschränkten Konvergenz wird aber auf dem $\mathbb{C}$ -Vektorraum $\mathcal{L}_{\mathbb{C}}(E)$ gerade durch die oben angegebene Norm $v \mapsto \|v\|_p$ induziert. Demnach ist also die Endomorphismenfamilie $v \in \mathcal{L}_{\mathbb{C}}(E)$ auch noch hinsichtlich der von der Norm (5.3) hervorgerufenen Topologie des Vektorraumes $\mathcal{L}_{\mathbb{C}}(E)$ beschränkt. Geht man mit Hilfe des reziproken normtopologischen $\mathbb{C}$ -Isomorphismus $\tilde{\tau}$ von $\mathcal{L}_{\mathbb{C}}(E)$ wieder zurück auf die komplexe BANACH-Algebra $\text{Mat}_k(\mathbb{C})$, so erhält

man unmittelbar die Behauptung. -

Anmerkung: Die unter (i) durchgeführte Schlußrichtung läßt sich auf verschiedene Art, insbesondere natürlich auch ohne Heranziehung des Isomorphiesatzes von TYCHONOFF, z.B. mit Hilfe des (tiefer liegenden) Theorems von BANACH-STEINHAUS vollziehen. Als komplexer BANACH-Raum ist E sicher ein tonnelierter lokalkonvexer topologischer $\mathbb{C}$ -Vektorraum, so daß $\mathcal{V}$ als eine hinsichtlich der Topologie der punktweisen Konvergenz beschränkte Teilmenge von $\mathcal{L}_{\mathbb{C}}(E)$ gleichgradig stetig ist. Folglich ist $\mathcal{V}$ in bezug auf alle τ -Topologien von $\mathcal{L}_{\mathbb{C}}(E)$, insbesondere also auch hinsichtlich der durch die Norm $v \mapsto \|v\|_p$ auf $\mathcal{L}_{\mathbb{C}}(E)$ induzierten Topologie der beschränkten Konvergenz, beschränkt ("Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit"). Der weitere Beweis verläuft dann wie unter (ii) angegeben.

5.3. Es sei zunächst noch kurz an den Begriff des Minimalpolynoms über $\mathbb{C}$ einer Matrix $A \in \text{Mat}_n(\mathbb{C})$ erinnert. Ist $\mathbb{C}[Z]$ die durch Adjunktion einer unabhängigen Transzendenten Z zum Körper $\mathbb{C}$ konstruierte $\mathbb{C}$ -Algebra der Polynome in einer Unbestimmten, so versteht man darunter dasjenige, nach

Normierung seines Höchstkoeffizienten eindeutig bestimmte Polynom aus $\mathbb{C}[Z]$ vom Grad > 0 , welches den Kern des Ring-Homomorphismus $q(Z) \mapsto q(A)$ von $\mathbb{C}[Z]$ in $\text{Mat}_n(\mathbb{C})$ als Ideal $\neq 0$ im Hauptidealring $\mathbb{C}[Z]$ erzeugt. Mithin ist das Minimalpolynom von A , weil aufgrund des Satzes von CAYLEY-HAMILTON auch das charakteristische Polynom $\det(Z \cdot 1_n - A)$ von A über $\mathbb{C}$ diesem Annihilatorenideal angehört, Teiler des charakteristischen Polynoms von A im ZPE-Ring $\mathbb{C}[Z]$.

Mit Hilfsmitteln der elementaren Spektraltheorie und des Funktionalkalküls in nichtkommutativen komplexen BANACH-Algebren (vgl. etwa N. BOURBAKI [6; Chap. I]) leiten wir sodann aus dem vorstehenden Satz 5-1 das folgende wichtige Stabilitätskriterium her:

Satz 5-2: Ein linearer Diskretisierungsalgorithmus für das komplexe Anfangswertproblem (AWP_m) ist genau dann numerisch ℓ -stabil, ($\ell \geq 1$), falls der Spektralradius der Teilübergangsmatrix $\tilde{P}_n \in \text{Mat}_n(\mathbb{C})$ des induzierten stationären Punktprozesses die Ungleichung

$$(5.4) \quad \text{Spr}(\tilde{P}_n) \leq 1$$

erfüllt und im Falle $\text{Spr}(\tilde{P}_n) = 1$ alle zum peripheren

Spektrum der Matrix $\tilde{P}_n$ gehörenden Eigenwerte als Nullstellen des Minimalpolynoms von $\tilde{P}_n$ über $\mathbb{C}$ höchstens die Vielfachheit l besitzen.

Beweis: Es bezeichne im folgenden $\text{Spec}(\tilde{P}_n) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_r\} \subset \mathbb{C}$ das (diskrete) Spektrum von $\tilde{P}_n$ in bezug auf die nichtkommutative komplexe BANACH-Algebra $\text{Mat}_n(\mathbb{C})$ mit Einselement 1_n , wobei also $\{\lambda_j \mid 1 \leq j \leq r\}$ genau die r verschiedenen komplexen Eigenwerte der Matrix $\tilde{P}_n$ sind und natürlich $r \leq k$ erfüllt ist. Es sei ferner $v_i \geq 1$ die Vielfachheit von λ_i als Nullstelle des Minimalpolynoms von $\tilde{P}_n$. D.h. durch das Produkt

$$\prod_{i=1}^r (Z - \lambda_i)^{v_i}$$

sei die (eindeutige) Zerfällung des (normierten) Minimalpolynoms der Matrix $\tilde{P}_n$ im Polynomring $\mathbb{C}[Z]$ in relativ prime Faktoren genau v_i -ten Grades gegeben, so daß also insbesondere $\sum_{i=1}^r v_i \leq k$ zutrifft. Schließlich bedeute $\mathcal{O}(\text{Spec}(\tilde{P}_n))$ die Garbe der Keime der in der Umgebung des Spektrums von $\tilde{P}_n$ holomorphen Funktionen. Für jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ betrachten wir die ganze holomorphe Funktion $g_n : \zeta \mapsto \zeta^n$, wählen in der Zahlenebene $\mathbb{C}$ eine beliebige offene, relativ kompakte Umgebung U des

kompakten Spektrums $\text{Spec}(\tilde{P}_n)$ und bezeichnen weiter mit $\tilde{g}_n$ den durch die Funktion g_n über U bestimmten holomorphen Funktionskeim; $\tilde{g}_n$ gehört demnach dem Halm $\mathcal{O}(\text{Spec}(\tilde{P}_n))_U$ über U der Garbe $\mathcal{O}(\text{Spec}(\tilde{P}_n))$ an. In der Menge $U \subset \mathbb{C}$ läßt sich ein Zyklus γ konstruieren mit den beiden folgenden Eigenschaften:

- (i) γ ist null-homolog in U ;
- (ii) γ besitzt in bezug auf jeden Punkt der Menge $\text{Spec}(\tilde{P}_n)$ den topologischen Index (die "Umlaufzahl") 1 in U .

Mit Hilfe der Spektralintegralformel von GELFAND-DUNFORD-TAYLOR gewinnt man dann aus Gleichung (5.2) für jede Matrix $B_{l,n}(h) \in \text{Mat}_n(\mathbb{C})$ bei vorgegebenem $l \geq 1$ die folgende Integraldarstellung

$$(5.5) \quad B_{l,n}(h) = \frac{h^{l-1}}{2\pi i} \int_{\gamma} \tilde{g}_n(\zeta) \cdot \tilde{R}(\zeta) d\zeta, \quad h \in]0, +\infty[.$$

Dabei ist die Abbildung $R : \zeta \longmapsto (\zeta \cdot 1_n - \tilde{P}_n)^{-1} \in \text{Mat}_n(\mathbb{C})$ die auf $\mathbb{C}$ meromorphe, im Punkt $\infty \in S_\infty$ der RIEMANNschen Zahlenkugel verschwindende Resolvente der Matrix $\tilde{P}_n \in \text{Mat}_n(\mathbb{C})$ mit der genauen Polmenge $\text{Spec}(\tilde{P}_n)$ und der Integralkern $\tilde{R}$ der durch R über U bestimmte meromorphe Abbildungskeim. Um die für die weiteren Über-

legungen wichtige Partialbruchzerlegung der auf der offenen Menge $\oint_{\mathbf{C}} \{\lambda_1, \dots, \lambda_r\}$ holomorphen Abbildung $\zeta \mapsto R(\zeta)$ zu gewinnen, stellen wir die Resolvente dort in der Form

$$(5.6) \quad R = \sum_{j=1}^r R_j$$

dar, als Summe der zu den Eigenwerten λ_j gehörenden, auf der punktierten Zahlenebene $\mathbf{C} \setminus \{\lambda_j\}$ holomorphen, reduzierten Resolventen $\zeta \mapsto R_j(\zeta) \in \text{Mat}_n(\mathbf{C})$ von $\tilde{P}_n$, ($1 \leq j \leq r$). Bedeutet weiter $P_j \in \text{Mat}_n(\mathbf{C})$ die zu λ_j und $\tilde{P}_n$ gehörende idempotente Matrix und beachtet man, daß λ_j Pol der meromorphen Abbildung $\zeta \mapsto R_j(\zeta)$ mit der genauen Ordnung ν_j ist, mithin also durch $N_j = (\tilde{P}_n - \lambda_j \cdot 1_n) \cdot P_j$ eine nilpotente Matrix aus der $\mathbf{C}$ -Algebra $\text{Mat}_n(\mathbf{C})$ gegeben wird mit $N_j^{\nu_j-1} \neq 0$, $N_j^{\nu_j} = 0$, so erhält man für die reduzierten Resolventen R_j , ($1 \leq j \leq r$), die folgenden Partialbruchzerlegungen:

$$(5.7) \quad R_j(\zeta) = (\zeta - \lambda_j)^{-1} \cdot P_j + \sum_{\nu=1}^{\nu_j-1} (\zeta - \lambda_j)^{-\nu-1} \cdot N_j^{\nu}, \quad \zeta \in \mathbf{C} \setminus \{\lambda_j\}.$$

Zusammen mit der Integralformel von CAUCHY, welche für $0 \leq \nu \leq \nu_j$ die Gleichungen

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} g_n(\zeta) \cdot (\zeta - \lambda_j)^{-\nu-1} d\zeta = \frac{1}{\nu!} g_n^{(\nu)}(\lambda_j) = (\nu!) \tilde{\lambda}_j^{-\nu}, \quad (1 \leq j \leq r),$$

liefert, erhält man sodann aus Gleichung (5.5) über die Beziehungen (5.6) und (5.7) bei beliebigem $n \in \mathbb{N}$ die folgende Darstellung für die Matrix $B_{1,n}(h)$ in der Algebra $\text{Mat}_n(\mathbb{C})$:

$$(5.8) \quad B_{1,n}(h) = h^{1-n} \sum_{j=1}^n \{ \tilde{\lambda}_j P_j + \sum_{i=1}^{j-1} \binom{n}{i} \tilde{\lambda}_j^{n-i} N_j^i \}, \quad h \in]0, +\infty[.$$

Der Gleichung (5.8) entnimmt man: Dann und nur dann existiert ein $\delta_0 > 0$ mit der Eigenschaft, daß für jede Zahl $b > 0$ die Matrizenfamilie $\{ B_{1,n}(h) \in \text{Mat}_n(\mathbb{C}) \mid n \in]0, \delta_0] , 0 \leq n \leq N_b^1 \}$ durch eine (noch vom vorgegebenen b abhängige) Schranke gleichmäßig normbeschränkt wird, falls $\text{Spr}(\tilde{P}_n) = \sup_{1 \leq j \leq n} |\tilde{\lambda}_j| \leq 1$ gilt und falls ein Eigenwert $\lambda_j \in \mathbb{C}$ von $\tilde{P}_n$ mit $|\lambda_j| = 1$ existiert, darüber hinaus seine Vielfachheit ν_j noch die Bedingung $\nu_j - 1 \leq b - 1$ erfüllt. Das aber war gerade die Behauptung. -

Die Charakterisierung der numerischen 1 -Stabilität in Satz 5-2 ist insofern noch sehr allgemein gehalten, als sie keinerlei Bezug auf die spezielle, durch den Ablauf des linearen Diskretisierungsalgorithmus bedingte Struktur der Teilübergangsmatrix $\tilde{P}_n$ des induzierten stationären Punktprozesses nimmt. Diese spezielle Struktur ermöglicht jedoch eine leicht zu handhabende Konkretisierung von Satz 5-2, denn bekanntlich

fällt im Polynomring $\mathbb{C}[Z]$ das normierte Minimalpolynom der k -reihigen komplexen oberen FROBENIUS-Matrix (4.9) gerade mit dem charakteristischen Polynom $\det(Z \cdot 1_n - \tilde{P}_n)$ von $\tilde{P}_n$ zusammen und wird wegen der in Abschnitt 4.1 getroffenen Festsetzungen $\alpha_n = -\tilde{\alpha}_n$ für $0 \leq n \leq k-1$ und $\alpha_n = 1$ durch

$$(5.9) \quad \mathbb{C}[Z] \ni p_n(Z) = \sum_{n=0}^k \alpha_n Z^n$$

dargestellt. Denn die Teilübergangsmatrix $\tilde{P}_n$ bildet ja offenbar gerade die Begleitmatrix des normierten Polynoms $p_n(Z)$. Zusammen mit Satz 5-2 erhält man aus diesen Überlegungen den folgenden

Satz 5-3: Ein linearer Diskretisierungsalgorithmus ist genau dann numerisch ℓ -stabil, falls sämtliche Nullstellen des normierten Polynoms (5.9) k -ten Grades in der kompakten Einheitskreisscheibe der Zahlenebene $\mathbb{C}$ liegen und jede Wurzel auf dem Einheitskreis selbst höchstens die Vielfachheit ℓ besitzt.

Die vorstehende, überaus einfache Kennzeichnung der numerischen ℓ -Stabilität erlaubt jetzt einen Brückenschlag zu den bereits erwähnten, ursprünglich von H. RUTISHAUSER [25] und G. DAHLQUIST [8], [9] eingeführten, bekannten Stabilitätsbegriffen und sie er-

möglichst es zugleich, für diese letzteren eine neue Charakterisierung zu geben, die wir im folgenden Korollar zu Satz 5-3 formulieren:

Korollar: Genau die im Sinne von H. RUTISHAUSER stabilen linearen k -Schrittalgorithmen für das komplexe Anfangswertproblem (AWP_k) erster Ordnung sind numerisch k -stabil und genau die im Sinne von G. DAHLQUIST stabilen linearen Mehrschrittalgorithmen für das komplexe Anfangswertproblem (AWP_m) der Ordnung $m \geq 1$ sind numerisch m -stabil.

Aus der Gestalt (5.9) des charakteristischen Polynoms der Teilübergangsmatrix $\tilde{P}_h \in \text{Mat}_h(\mathbb{C})$ entnimmt man außerdem noch, daß das periphere Spektrum von $\tilde{P}_h$ niemals leer sein kann, denn es trifft ja sicher stets $1 \in \text{Spec}(\tilde{P}_h)$ zu. Dies hat im Hinblick auf die Ungleichung (5.4) die wichtige Bemerkung zur Konsequenz, daß in Wirklichkeit der Fall $\text{Spr}(\tilde{P}_h) < 1$ nicht eintreten kann.

5.4. Wir beschränken jetzt unsere Betrachtungen auf die im Sinne von G. DAHLQUIST stabilen linearen Mehrschrittalgorithmen für das komplexe Anfangswertproblem erster Ordnung (AWP_1), d.h. also in unserer Terminologie, auf die numerisch 1-stabilen linearen Diskreti-

sierungsalgorithmen. An die Darstellung (5.8) der (jetzt nicht mehr von der Schrittweite h abhängigen) Matrizenfamilie $\{B_{i,n} \in \text{Mat}_n(\mathbb{C}) \mid 0 \leq n \leq N_i^h\}$ knüpfen wir die folgende Überlegung an: Die (nicht zu umgehende) Existenz zumindest des trivialen Eigenwertes 1 im peripheren Spektrum der Teilübergangsmatrix $\tilde{P}_n$ verhindert, daß bei gegen Null strebender Schrittweite $h > 0$ der Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} B_{i,n} = 0$ in der zugrunde gelegten Normtopologie der komplexen BANACH-Algebra $\text{Mat}_n(\mathbb{C})$, also stets auch der Grenzwert $\lim_{h \rightarrow 0+} (\sup_{0 \leq n \leq N_i^h} \|B_{i,n}^h\|) = 0$ für die Kollektion der Erinnerungsvektoren des induzierten stationären Punktprozesses bei jeder in E vorgegebenen, als gleichmäßig normbeschränkt vorausgesetzten Familie von Startvektoren $\{f_0^h \in E \mid h \in]0, \eta] \subset \mathbb{R}_+\}$ erzielt werden kann. Man überlegt sich die letzte Folgerung am einfachsten wieder ganz analog wie im Teil (ii) des Beweises zu Satz 5-1 mit Hilfe der Tatsache, daß auf der Endomorphismenalgebra $\mathcal{L}_{\mathbb{C}}(E)$ die Topologie der punktweisen Konvergenz mit der Topologie der beschränkten Konvergenz zusammenfällt. Setzt man voraus, daß $\lambda_v = 1$ der einzige im peripheren Spektrum der Matrix $\tilde{P}_n$ liegende Eigenwert ist - die DAHLQUIST-Stabilität zieht dann notwendig die Einfachheit von λ_v nach sich - und daß die Menge $\text{Spec}(\tilde{P}_n)$ so durchnummeriert ist, daß

für die Eigenwertbeträge die Anordnung

$$|\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq \dots \leq |\lambda_{r-1}| < \lambda_r = 1$$

gewährleistet ist, so kann für die Normen der Erinnerungsvektoren $\{f_n^h \in E \mid h \in]0, \eta[, 0 \leq n \leq N_b^h\}$ mit Hilfe einer von T. KATO [17] für die normierter Matrizen hergeleiteten Abschätzung aufgrund von Satz 4-3 für jedes $b > 0$ die folgende obere Schranke angegeben werden (mit $h \in]0, \eta[$):

$$(5.10) \sup_{0 \leq n \leq N_b^h} \|f_n^h\| \leq \left\{ \frac{\rho'}{(1-\rho')^h} (\|\tilde{P}_h\|_\beta + 1)^{h-1} + \left[\frac{2}{1-|\lambda_{r-1}|} (\|\tilde{P}_h\|_\beta + 1) + 1 \right]^{h-1} \right\} \cdot \|f_0^h\|$$

Dabei bedeutet $\|\cdot\|_\beta$ die von $\mathcal{L}_C(E)$ unter einem normtopologischen Isomorphismus auf die $\mathbf{C}$ -Algebra $\text{Mat}_h(\mathbf{C})$ transportierte Norm (5.3) und ρ' eine reelle Zahl, welche lediglich der Bedingung $\frac{1}{2}(1 + |\lambda_{r-1}|) < \rho' < 1$ zu unterwerfen ist.

Man entnimmt der Normabschätzung (5.10) über die durch die Forderung nach 1-Stabilität erzwungene gleichmäßige Beschränktheit der Abbildung $h \mapsto \sup_{0 \leq n \leq N_b^h} \|f_n^h\|$ auf dem Intervall $]0, \eta[\subset \mathbf{R}_+$ hinausgehend, daß sicherlich dann eine weitgehende Dämpfung des Einflusses der Startvektoren auf die Familie der Erinnerungsvektoren erzielt werden kann, falls der zweit-dominante Eigen-

wert λ_{r-1} , der Teilübergangsmatrix $\tilde{P}_n$ nahe bei Null liegt, d.h. falls der Durchmesser < 1 ihres punktierten Spektrums $\text{Spec}'(\tilde{P}_n) = \text{Spec}(\tilde{P}_n) \setminus \{1\}$ möglichst klein ausfällt. Man wird demnach also zumindest fordern, daß neben der Einfachheit des trivialen Eigenwertes $\lambda_r = 1$ noch $\text{Spec}'(\tilde{P}_n)$ ganz in der offenen Einheitskreisscheibe von $\mathbb{C}$ enthalten ist. Stationäre Punktprozesse, deren Teilübergangsmatrix $\tilde{P}_n \in \text{Mat}_n(\mathbb{C})$ diese beiden Bedingungen erfüllen, nennen wir asymptotisch total stabil. Entsprechend sollen lineare Diskretisierungsalgorithmen für das komplexe Anfangswertproblem (AWP_k) dann total stabil heißen, falls diese asymptotisch total stabile stationäre Punktprozesse im soeben definierten Sinne induzieren.

Es stellt sich die Frage, ob für das Anfangswertproblem (AWP_k) optimale total stabile lineare Diskretisierungsalgorithmen der Schrittzahl $k > 1$ existieren. Dabei ist das Optimum im Sinne größtmöglichen Approximationsgrades p der zugehörigen DAHLQUIST-Distributionen zu verstehen. Der Fall $p > k + 2$ scheidet von vornherein aus. Die Gleichung $p = k + 2$ würde nach sich ziehen, daß die Schrittzahl k gerade und die Teilübergangsmatrix $\tilde{P}_n$ des induzierten stationären Punktprozesses nur periphere

Eigenwerte besitzt. Das trifft nicht zu. Demnach bleibt $p = k + 1$ als der für total stabile lineare Diskretisierungsalgorithmen zu erreichende optimale Approximationsgrad. Konstruiert man ein normiertes Polynom k -ten Grades $p_k(Z) = \sum_{n=0}^k \alpha_n Z^n$ in der $\mathbb{C}$ -Algebra $\mathbb{C}[Z]$, dessen sämtliche Nullstellen in der offenen Einheitskreisscheibe von $\mathbb{C}$ liegen mit Ausnahme einer einfachen Nullstelle 1 auf ihrem Rande, so existiert nach Korollar 2 zu Satz 3-3 zu dem Koeffizienten- k -tupel $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}) \in \mathbb{C}^k$ genau eine normierte DAHLQUIST-Distribution aus dem Raum $\mathcal{D}_{t,k}^{t,k+1}(\Omega; \mathbb{C})$ der Gestalt

$$T_{t,k} = \sum_{n=0}^k \alpha_n \varepsilon_{(t+n,t)} - (-1)^m \sum_{n=0}^k \beta_n \delta_{(t+n,t)}.$$

Weil der zugehörnde lineare Diskretisierungsalgorithmus total stabil ist, gilt der

Satz 5-4: Für das komplexe Anfangswertproblem (AWP_4) existieren total stabile lineare Diskretisierungsalgorithmen der Schrittzahl $k > 1$ mit dem Approximationsgrad $p = k + 1$; genau dieser Approximationsgrad ist optimal erreichbar.

Die obige Argumentation, welche die Einführung des Begriffs des asymptotisch total stabilen stationären

Punktprozesses motiviert hat, erinnert an den aus der Theorie der linearen Schwingungen und der Theorie der Regelungssysteme - man denke etwa an die Stabilität von Regelkreisen - her bekannten Begriff der dynamischen Stabilität. Tatsächlich hängen diese beiden Begriffe auch sehr eng miteinander zusammen. Ist nämlich wie soeben $\mathbf{C}[Z] \ni p_k(Z) = \sum_{n=0}^k \alpha_n Z^n$ das charakteristische Polynom k -ten Grades der Teilübergangsmatrix $\tilde{P}_k$ eines induzierten asymptotisch total stabilen stationären Punktprozesses, so folgt aus der von G. DAHLQUIST [8] konsequent ausgenutzten Tatsache, daß unter der MÖBIUS-Transformation $z \mapsto \frac{z-1}{z+1}$ die offene Einheitskreisscheibe $\{z \in \mathbf{C} \mid |z| < 1\}$ konform isomorph auf die offene Halbebene $\{w \in \mathbf{C} \mid \operatorname{Re} w < 0\}$ abgebildet wird, daß das Polynom

$$\tilde{p}_k(w) = \frac{1}{w} (1 - w)^h p_k\left(\frac{1+w}{1-w}\right)$$

aus der Algebra $\mathbf{C}[W]$ vom Grade $\tilde{k} \leq k - 1$ dynamisch stabil ist, d.h. daß sämtliche Nullstellen von $\tilde{p}_k(w) = \sum_{v=0}^{\tilde{k}} \tilde{\alpha}_v w^v$ in der offenen linken Halbebene von $\mathbf{C}$ gelegen sind. Die Koeffizienten von $\tilde{p}_k(w)$ berechnen sich zu

$$(5.11) \quad \tilde{\alpha}_v = \sum_{n=0}^h \left\{ \sum_{\pi=0}^{\inf(k-n, h-1-v)} (-1)^{h-n-\pi} \binom{h-n}{\pi} \cdot \binom{n}{h-1-v-\pi} \right\} \alpha_n$$

für $0 \leq i \leq k-1$. Im Falle des reellen Anfangswertproblems (AWP_r), d.h. falls das Polynom $\tilde{p}_k(\lambda)$ sogar in $\mathbb{R}[W]$ liegt, läßt sich auf $\tilde{p}_k(W)$ das Determinantenkriterium von ROUTH-HURWITZ anwenden. Man erhält dann über die Gleichungen (5.11) $\tilde{k}$ nicht-lineare Bedingungen für die reellen Koeffizienten $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_k$, deren Erfülltsein für die asymptotisch totale Stabilität des induzierten stationären Punktprozesses notwendig und hinreichend ist. Auf diesem Weg kann man sich z. B. davon überzeugen, daß ein stationärer Punktprozeß, bei dem das zu $\mathbb{R}[Z]$ gehörende charakteristische Polynom seiner Teilübergangsmatrix die Koeffizientenbedingung $|\alpha_0| = \alpha_k = 1$ erfüllt, sicher nicht asymptotisch total stabil sein kann.

5.5. Wenn $\mathbb{R}$ der Grundkörper ist, liegt es nahe, den in § 4 zunächst in den Vordergrund gestellten Fall des von einem linearen Diskretisierungsalgorithmus induzierten stationären Punktprozesses mit stochastischer Teilübergangsmatrix $\tilde{P}_k \in \text{Mat}_k(\mathbb{R})$ auch in bezug auf sein asymptotisches Stabilitätsverhalten noch besonders ins Auge zu fassen. Mit anderen Worten ausgedrückt: Die mit der in § 4 dargelegten wahrscheinlichkeitstheoretischen Modellvorstellung

einer MARKOFF-Kette verbundenen Überlegungen führen dazu, die numerischen Stabilitätseigenschaften insbesondere jener linearen Diskretisierungsalgorithmen für das reelle Anfangswertproblem (AWP₁) zu betrachten, bei denen die Koeffizienten α_{nk} für $0 \leq n \leq k-1$ der zugehörigen DAHLQUIST-Distribution aus dem Raum $\mathcal{C}_{t,k}^{1,0}(\tilde{\Omega}; \mathbb{R})$ sämtlich nichtpositiv sind. Legt man in der $\mathbb{R}$ -Algebra $\text{Mat}_k(\mathbb{R})$ die folgende Zeilen-Norm

$$(5.12) \quad (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq k \\ 1 \leq j \leq k}} = A \longmapsto \|A\|_{\infty} = \sup_{1 \leq i \leq k} \sum_{j=1}^k |a_{ij}|$$

zugrunde, so gilt $\|\tilde{P}_k\|_{\infty} = 1$. Demnach stellt $\{B_{k,n} \in \text{Mat}_k(\mathbb{R}) \mid n \in \mathbb{N}\}$ eine zyklische Halbgruppe hinsichtlich der Norm $\|\cdot\|_{\infty}$ kontrahierender Matrizen dar. Satz 5-1 liefert somit unmittelbar die Aussage

Satz 5-5: Jeder stationäre Punktprozeß der Schrittzahl $k \geq 1$ mit stochastischer Teilübergangsmatrix $\tilde{P}_k \in \text{Mat}_k(\mathbb{R})$ ist bereits asymptotisch 1-stabil.

Wohl zum ersten Mal sind solche lineare Diskretisierungsalgorithmen für das reelle Anfangswertproblem (AWP₁), welche stationäre Punktprozesse mit stochastischer Teilübergangsmatrix induzieren, von M. REIMER [21], [22], [23] im Rahmen einer allgemeinen Theorie

betrachtet worden. Dabei ging M. REIMER allerdings nicht wie hier von einer wahrscheinlichkeitstheoretischen Modellvorstellung aus, sondern er gelangte zu seinem Begriff der "absoluten Stabilität" aufgrund praktischer Erwägungen über die Fehlerfortpflanzung bei numerischer Integration über ein beliebig vorgegebenes kompaktes Teilintervall von $\mathbb{R}$. In dieser Terminologie folgt unmittelbar aus Satz 5-5 wegen des Korollars zu Satz 5-3 noch das folgende Ergebnis, das bereits von M. REIMER [21], jedoch auf einem vom hier eingeschlagenen, vollständig verschiedenen Weg bewiesen worden ist:

Korollar: Jeder absolut stabile lineare Diskretisierungsalgorithmus für das reelle Anfangswertproblem (AWP_4) ist auch im Sinne von G. DAHLQUIST stabil.

Auf die - in Analogie zu den im Sinne von G. DAHLQUIST stabilen linearen Diskretisierungsalgorithmen - für absolut stabile lineare Algorithmen geltende Beschränkung $p \leq k + 1$ des Approximationsgrades der zugeordneten DAHLQUIST-Distribution gehen wir nicht ein, sondern wir verweisen dazu auf die oben genannten Arbeiten von M. REIMER.

§ 6: Konvergenzuntersuchungen

6.1. In Abschnitt 5.2 wurde darauf hingewiesen, daß für den Begriff der numerischen $\mathcal{L}$ -Stabilität eines linearen Algorithmus zur Diskretisierung des komplexen Anfangswertproblems (AWP_m) lediglich die Hauptteile der zugehörnden Familie $\Delta_m^{\infty}(\mathbb{R}_+)$ komplexer DAHLQUIST-Distributionen über den induzierten stationären Punktprozeß eine Rolle spielen. Anders liegen dagegen die Verhältnisse bei der Frage nach der Konvergenz der durch den linearen Diskretisierungsalgorithmus erhaltenen Näherungslösungen gegen die exakte Lösung u des Anfangswertproblems (AWP_m) bei gegen Null strebender Schrittweite $h > 0$: Jetzt sind natürlich auch die Störungsteile der DAHLQUIST-Distributionen mit zu berücksichtigen. Mit diesem Problemkreis wollen wir uns im vorliegenden Paragraphen befassen. Wir benötigen für unsere Zwecke zunächst eine einfache, globale Abschätzung des "Skalarproduktes" einer stetig differenzierbaren Funktion mit einer komplexen DAHLQUIST-Distribution, die im nachstehenden Abschnitt vorgenommen werden soll.

6.2. Es bezeichne Ω ein nichttriviales offenes relativ kompaktes Teilintervall der reellen Zahlen-gerade $\mathbb{R}$, $p \geq 0$ eine natürliche Zahl und es sei eine Funktion $u \in \mathcal{E}_C^{p+m}(\bar{\Omega})$ sowie eine komplexe DAHLQUIST-Distribution $T_{t,h} \in \mathcal{D}_{t,h}^{m,p}(\Omega; \mathbb{C}) \subseteq (\mathcal{P}_{p+m-1}(\Omega; \mathbb{C}))^\circ$ der Schrittzahl $k \geq 1$, der Schrittweite $h > 0$ mit einem Approximationsgrad $\geq p$ vorgegeben. Wir wollen für den Term $|\langle u, T_{t,h} \rangle|$ eine globale, d.h. für jeden zulässigen Grundpunkt $t \in \Omega$ gültige obere Schranke herleiten. Weil $T_{t,h}$ zum $(p+m)$ -dimensionalen Untervektorraum $\mathcal{P}_{p+m-1}(\Omega; \mathbb{C})$ von $\mathcal{E}_C^{p+m}(\Omega)$ orthogonal ist, konstruieren wir den Quotientenvektorraum $\mathcal{E}_C^{p+m}(\Omega) / \mathcal{P}_{p+m-1}(\Omega; \mathbb{C})$ und bezeichnen mit $\check{u}$ das Bild der Funktion u unter dem kanonischen Epimorphismus $\mathcal{E}_C^{p+m}(\Omega) \longrightarrow \mathcal{E}_C^{p+m}(\Omega) / \mathcal{P}_{p+m-1}(\Omega; \mathbb{C})$. Offenbar gilt dann für jeden Repräsentanten $v \in \check{u}$ die Gleichheit

$$(6.1) \quad \langle u, T_{t,h} \rangle = \langle v, T_{t,h} \rangle.$$

Wählt man nun als Repräsentanten $v \in \check{u} \bmod \mathcal{P}_{p+m-1}(\Omega; \mathbb{C})$ speziell das Restglied in der TAYLOR-Entwicklung der komplexwertigen Funktion u bis zur Ableitung der Ordnung $p+m-1$ um den zulässigen Grundpunkt $t \in \Omega$ der DAHLQUIST-Distribution $T_{t,h}$, so gewinnt man für das "Skalarprodukt" $\langle u, T_{t,h} \rangle$ wegen (6.1) die folgende

Integraldarstellung:

$$(6.2) \quad \langle u, T_{t,k} \rangle = k^{p+m} \int_0^k K_{p,m}(\xi) u^{(p+m)}(t+k\xi) d\xi.$$

Wenn wie üblich $\xi \mapsto Y(\xi)$ die HEAVISIDE-Sprungfunktion auf $\mathbb{R}$ mit $\partial Y = \varepsilon$ bezeichnet, nimmt der in (6.2) auftretende, komplexwertige PEANO-GREENsche Integralkern $K_{p,m}$ auf dem kompakten Intervall $[0,k] \subset \mathbb{R}$, die folgende Gestalt an:

$$K_{p,m} : \xi \mapsto \frac{1}{(p+m-1)! k^{p+m-1}} \langle (\tau-t-k\xi)^{p+m-1} Y(\tau-t-k\xi), T_{t,k} \rangle,$$

oder falls

$$\mathcal{E}_{t,k}^{m,p}(\Omega, \mathbb{C}) \ni T_{t,k} = \sum_{n=0}^h \alpha_n \varepsilon_{(t+nk)} - (-k)^m \sum_{n=0}^h \beta_n \partial^n \varepsilon_{(t+nk)}$$

gilt, die nachstehende, vom gewählten Grundpunkt $t \in \Omega$ und der Schrittweite $h > 0$ unabhängige, explizite Form:

$$K_{p,m} : \xi \mapsto \frac{1}{(p+m-1)!} \sum_{n=0}^h \alpha_n (n-\xi)^{p+m-1} Y(n-\xi) - \frac{1}{(p-1)!} \sum_{n=0}^h \beta_n (n-\xi)^{p-1} Y(n-\xi).$$

Man ersieht aus dieser Darstellung, daß in den PEANO-GREEN-Kern $K_{p,m}$ sowohl die Koeffizienten des Hauptteils als auch die des Störungsteils der PAHLQVIST-Distribution $T_{t,k}$ eingehen. Offenbar existiert das

Integral $0 \leq k_{p,m} = \int_0^1 |K_{p,m}(\xi)| d\xi < +\infty$. Wir denken uns den $\mathbb{C}$ -Vektorraum $\mathcal{E}_c^\circ(\bar{\Omega})$ kanonisch in den komplexen BANACH-Raum $L^\infty(\bar{\Omega}) = L_c^\infty(\bar{\Omega}, d\xi)$ eingebettet ($d\xi$ das LEBESGUE-Maß) und versehen den Untervektorraum $\mathcal{E}_c^\circ(\bar{\Omega})$ mit der induzierten Relativtopologie, d.h. mit der durch die ČEBYŠEV-Norm $w \mapsto \|w\|_{L^\infty(\bar{\Omega})}$ hervorgerufenen Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf $\bar{\Omega}$, so daß der kanonische Monomorphismus $\mathcal{E}_c^\circ(\bar{\Omega}) \rightarrow L^\infty(\bar{\Omega})$ eine Isometrie ist. Dann erhält man aus der Integraldarstellung (6.2) von $\langle u, T_{t,t} \rangle$ den folgenden

Satz 6-1: Zu jeder vorgegebenen Funktion $u \in \mathcal{E}_c^{p+m}(\bar{\Omega})$ und zu jeder komplexen DAHLQUIST-Distribution $T_{t,t} \in \mathcal{D}_{t,t}^{m,p}(\Omega; \mathbb{C})$ existiert eine reelle, vom zulässigen Grundpunkt $t \in \Omega$ und der Schrittweite $h > 0$ unabhängige Konstante $k_{p,m} \geq 0$ und eine komplexe Zahl θ_t mit $|\theta_t| \leq 1$, so daß die Gleichung

$$(6.3) \quad \langle u, T_{t,t} \rangle = \theta_t h^{p+m} k_{p,m} \cdot \|u^{(p+m)}\|_{L^\infty(\bar{\Omega})}$$

gültig ist.

6.3. Unseren weiteren Betrachtungen liegt das komplexe Anfangswertproblem (AWP_m) der Ordnung $m \geq 1$ zugrunde. Es existiert sicher unter den in Abschnitt 3.3 ange-

gegebenen Voraussetzungen ein die Anfangsabszisse $a = 0$ umfassendes offenes relativ kompaktes Intervall $\Omega \subset \mathbb{R}$ und auf seiner Hülle $\bar{\Omega}$ eine eindeutig bestimmte komplexwertige Lösungsfunktion u . Es werde $\sup \Omega = b < +\infty$ gesetzt und zunächst die Schrittweite $h > 0$ so gewählt, daß bei vorgegebener Schrittzahl $k \geq 1$ die gemäß (5.1) gebildete natürliche Zahl $N_b^k \geq 1$ ausfällt. Für die Lösungsfunktion gelte $u \in \mathcal{E}_C^{m+p}(\bar{\Omega})$ mit einer natürlichen Zahl $p \geq 0$. Dann erhält man durch "skalare Multiplikation" der normierten DAHLQUIST-Distribution

$$\mathcal{D}_{t,t_n}^{m,p}(\Omega, \mathbb{C}) \ni T_{t,t_n} = \sum_{n=0}^k \alpha_n \varepsilon_{(t+t_n)} - (-h)^m \sum_{n=0}^k \beta_n \partial^m \varepsilon_{(t+t_n)}$$

vom Approximationsgrad $\geq p$ in den zulässigen Grundpunkten $t = t_n$ mit $t_n = nh$, ($0 \leq n \leq N_b^k - 1$), der Gitterspur S auf Ω mit der Funktion u aufgrund der Darstellung (6.3) von $\langle u, T_{t,t_n} \rangle$ und der Relationen $\langle u, \partial^m \varepsilon_{(t)} \rangle = (-1)^m \langle u^{(m)}, \varepsilon_{(t)} \rangle = f(t, u(t))$, die ihrerseits durch "Zurückgehen" vom Distributionsraum $\mathcal{E}_C^m(\Omega)$ auf den Grundraum $\mathcal{E}_C^m(\Omega)$ mit Hilfe des zu ∂^m formal-transponierten Differentialoperators $(-1)^m \frac{d^m}{ds^m}$ gewonnen werden, die folgenden Gleichungen für $0 \leq n \leq N_b^k - 1$:

$$(6.4) \quad \sum_{n=0}^k \alpha_n u(t_{n+n}) = h^m \sum_{n=0}^k \beta_n f(t_{n+n}, u(t_{n+n})) + \theta_{t_n} h^{p+m} h_{p,m} \|u^{(p+m)}\|_{L^p(\bar{\Omega})}.$$

Dabei gilt $\theta_{t_n} \in \mathbb{C}$ und $|\theta_{t_n}| \leq 1$ nach Satz 6-1. Ihnen stellen wir die entsprechende, dem eigentlichen, praktischen Rechnungsablauf zugrunde liegende nichtlineare Differenzengleichung für die Näherungswerte u_n in den Gitterknoten t_n , ($0 \leq n \leq N_b^k - 1$), aus dem Intervall Ω :

$$(6.5) \quad \sum_{m=0}^k \alpha_m u_{n+m} = h^m \sum_{m=0}^k \beta_m f(t_{n+m}, u_{n+m}), \quad (0 \leq n \leq N_b^k - 1),$$

zur Seite. Falls der lineare Diskretisierungsalgorithmus explizit ist, d.h. falls $\beta_k = 0$ gilt ("offene Differenzenformel"), ist die Differenzengleichung (6.5), ausgehend von den zur gewählten Schrittweite $h > 0$ im Rahmen einer gesonderten Anlaufrechnung - lineare k-Schrittalgorithmen bieten ja für $k > 1$, im Gegensatz zu den Einschrittalgorithmen, etwa dem klassischen RUNGE-KUTTA-Verfahren, die charakteristische Schwierigkeit, nicht selbststartend zu sein - ermittelten Startwerten $u_0, \dots, u_{k-1}$ in den Gitterknoten $t_0, \dots, t_{k-1}$, unmittelbar auflösbar. Im Falle eines impliziten linearen Diskretisierungsalgorithmus, d.h. falls $\beta_k \neq 0$ ist ("geschlossene Differenzenformel"), sichert aber, wenn $L > 0$ die globale LIPSCHITZ-Konstante der Funktion f auf $\bar{\Omega}$ bedeutet und noch

die Konstante

$$(6.6) \quad C_k = h^m |\beta_k| L > 0$$

eingeführt wird, die Wahl der Schrittweite $h > 0$ derart, daß die Bedingung $C_k < 1$ gewährleistet ist, die Konvergenz des bei jedem Schritt zur Berechnung des "neuen" Näherungswertes u_{n+k} , ($0 \leq n \leq N_k^* - 1$), durchzuführenden Iterationsverfahrens. Dies folgt aus einer einfachen Anwendung des elementaren Fixpunktsatzes von S. BANACH über kontrahierende Abbildungen vollständiger metrischer Räume in sich. Die Bedingung $C_k < 1$ soll im folgenden stets als erfüllt vorausgesetzt werden.

Um den durch den linearen Diskretisierungsalgorithmus im n -ten Schritt verursachten Diskretisierungsfehler $|u_n - u(t_n)|$ erfassen und dann abschätzen zu können, greifen wir auf einen bereits in § 4 entscheidend benutzten Gedanken zurück, der durch den dort auseinander gesetzten Zusammenhang mit der Theorie der stationären MARKOFF-Ketten beschränkten Gedächtnisses nahegelegt wurde: Wir fassen das k -Tupel $(u_n, u_{n+1}, \dots, u_{n+k-1})$ der ermittelten Näherungswerte in den k Gitterknoten $t_n, t_{n+1}, \dots, t_{n+k-1}$ bzw. das entsprechende k -Tupel $(u(t_n), u(t_{n+1}), \dots, u(t_{n+k-1}))$ der

zu diesen Knoten gehörenden exakten Lösungsstellen als Vektoren aus dem Raum $E = \mathbf{C}^h$ mit diesen Koordinaten bezüglich der kanonischen Basis von E auf.

Insgesamt führen wir die nachstehenden Spaltenvektoren aus dem Vektorraum E ein (für $0 \leq n \leq N_b^k$):

$$\tilde{u}_n = \begin{bmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ \vdots \\ u_{n+h-2} \\ u_{n+h-1} \end{bmatrix}, \quad \tilde{u}(t_n) = \begin{bmatrix} u(t_n) \\ u(t_{n+1}) \\ \vdots \\ u(t_{n+h-2}) \\ u(t_{n+h-1}) \end{bmatrix}, \quad b_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b_{h-1,n} \end{bmatrix}, \quad b(t_n) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b_{h-1}(t_n) \end{bmatrix}, \quad \kappa_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ c_{h-1,n} \end{bmatrix},$$

wobei in b_n , $b(t_n)$, κ_n resp. die k -ten Koordinaten

$$b_{h-1,n} = \sum_{u=0}^h \beta_u f(t_{n+u}, u_{n+u}), \quad b_{h-1}(t_n) = \sum_{u=0}^h \beta_u f(t_{n+u}, u(t_{n+u})),$$

$$c_{h-1,n} = \theta_{t_n} \|k_{p,m}\| u^{(p+m)} \Big|_{L^\infty(\bar{\Omega})}$$

auftreten. Faßt man sodann die Gleichungen (6.4) und (6.5) unter erneuter Heranziehung (vgl. (4.9)) der oberen FROBENIUS-Matrix $\tilde{P}_h \in \text{Mat}_h(\mathbf{C})$ zusammen, so erhält man den Diskretisierungsfehler-Vektor

$$f_n = \tilde{u}_n - \tilde{u}(t_n), \quad (0 \leq n \leq N_b^k),$$

aus dem Vektorraum E durch die folgende Rekursion

$$f_{n+1} = \tilde{P}_h f_n + h^m [b_n - b(t_n) - h^p \kappa_n], \quad (0 \leq n \leq N_b^k - 1).$$

Aus dieser läßt sich unmittelbar die nachstehende, explizite Darstellung der Familie $\{f_n \in E \mid 0 \leq n \leq N_h^k\}$ gewinnen (mit $\tilde{P}_h^0 = 1_h$):

$$(6.7) \quad f_n = \tilde{P}_h^n f_0 + h^m \left[\sum_{v=0}^{n-1} \tilde{P}_h^{n-1-v} (b_v - b(t_v)) - h^p \sum_{v=0}^{n-1} \tilde{P}_h^{n-1-v} \tau_v \right].$$

Man entnimmt den Gleichungen (6.7) die folgende Tatsache:

Der Diskretisierungsfehler-Vektor f_n setzt sich additiv aus zwei wesentlich voneinander verschiedenen Komponenten zusammen: Der erste Term, der bei fest gewählter Schrittweite $h > 0$ unabhängig von h ist, entsteht dadurch, daß man den Ausgangsfehler-Vektor $f_0 \in E$ als Startvektor dem vom linearen Diskretisierungsalgorithmus induzierten stationären Punktprozeß mit der Teilübergangsmatrix $\tilde{P}_h \in \text{Mat}_k(\mathbb{C})$ unterwirft; f_n ist genau der n -te Erinnerungsvektor. Der erste Term ist demzufolge lediglich vom Hauptteil der zugehörigen DAHLQUIST-Distributionen abhängig. In den zweiten Term gehen dagegen sowohl der Haupt- als auch der Störungsteil der Familie der DAHLQUIST-Distributionen ein. Er ist außerdem von der Schrittweite h , von der Ordnung m des Anfangswertproblems (AWP_m) und vom Approximationsgrad $\geq p \geq 0$ der DAHLQUIST-Distributionen abhängig.

6.4. Entscheidend für die praktische Anwendbarkeit eines linearen Diskretisierungsalgorithmus ist das "asymptotische" Verhalten der Kollektion $\{f_n^k \in E \mid 0 \leq n \leq N_k\}$ von Fehlervektoren beim Grenzübergang $h \rightarrow 0+$. Dabei verwenden wir erneut die Bezeichnungswiese des Abschnitts 5.2 für die Abhängigkeit der Vektoren $f_n^k \in E$ von der gewählten Schrittweite $h > 0$. In Parallele zum dort eingeführten Begriff der numerischen l -Stabilität stellen wir, falls $l \geq 1$ eine vorgegebene natürliche Zahl bedeutet, die nachstehende Definition:

Ein linearer Diskretisierungsalgorithmus für das komplexe Anfangswertproblem (AWP_m) heißt genau dann l -konvergent, falls der in bezug auf die Normtopologie des Vektorraumes E existierende Grenzwert $\lim_{k \rightarrow \infty} f_0^k = 0$ stets die Relation $\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{0 \leq n \leq N_k} h^{l-1} \|f_n^k\| = 0$ nach sich zieht.

Mit dieser Begriffsbildung gilt dann der

Satz 6-2: Für die Lösungsfunktion des komplexen Anfangswertproblems (AWP_m) der Ordnung $m \geq 1$ gelte $u \in \mathcal{E}_C^{m+p}(\bar{\Omega})$ mit einer natürlichen Zahl $p \geq 1$. Es bezeichne l eine natürliche Zahl mit $1 \leq l \leq m$. Dann ist jeder numerisch l -stabile lineare

Diskretisierungsalgorithmus für (AWP_m) , dessen zugehörige Familie normierter DAHLQUIST-Distributionen einen Approximationsgrad $\geq p$ aufweist, bereits l -konvergent.

Beweis: Die kanonische Produkttopologie des k -dimensionalen $\mathbb{C}$ -Vektorraumes E möge durch die Norm $f \mapsto \|f\|_\infty$ induziert werden; man vergleiche die Definition (5.12), welche jetzt auf "einspaltige Matrizen" anzuwenden ist. Bezeichnet weiter $L > 0$ eine globale LIPSCHITZ-Konstante für die Funktion f auf dem kompakten Intervall $\overline{\Omega}$, so gilt, falls $\beta' = \sum_{n=0}^{h-1} |\beta_n| \geq 0$ gesetzt wird, für jede natürliche Zahl v mit $0 \leq v \leq N_v^k$ die Abschätzung

$$(6.8) \quad \|b_v - b(t_v)\|_\infty \leq L (\beta' \|f_v\|_\infty + |\beta_n| \|f_{v,n}\|_\infty).$$

Aufgrund der Voraussetzung und des Kriteriums 5-1 für l -Stabilität existieren zu $l = \sup \Omega$ eine reelle Zahl $\delta_0 > 0$ und eine gleichmäßige Schranke $M > 0$ mit der Eigenschaft, daß $h^{-1} \|\tilde{P}_h^n\|_\infty \leq M$ für jedes $h \in]0, \delta_0]$ mit $0 \leq n \leq N_h^k$ zutrifft. Es werde $\delta \in \mathbb{R}_+$ so gewählt, daß $0 < \delta < \delta_0$ gilt und $h \in]0, \delta]$ stets noch $C_h < 1$ nach sich zieht. Wird dann die Ungleichung (6.8) zur Abschätzung von $\|f_v\|_\infty$ in der Darstellung (6.7) herangezogen und

führt man neben (6.6) noch die weiteren Konstanten

$$(6.9) \quad C'_k = h^m \beta' L > 0, \quad \beta = \sum_{n=1}^h |\beta_n| > 0$$

ein, so erhält man durch Zusammenfassen der zu den Diskretisierungsfehler-Vektoren $\{f_n^k\}$, $\{f_v^k\}$ für $1 \leq v \leq n-1$ und $\{f_n^k\}$ gehörenden Terme nach leichter Rechnung für jede Schrittweite $h \in]0, \delta]$

$$(1-C_k)h^{l-1} \|f_n^k\|_\infty = M(1+C'_k) \cdot \|f_0^k\|_\infty + h^m M L \beta \sum_{j=1}^{n-1} \|f_j^k\|_\infty + \\ + n k^{m+p} b_{p,m} M \cdot \|u^{(p+m)}\|_{L^\infty(\bar{\Omega})}, \quad (0 \leq n \leq N_k^k).$$

Mit Hilfe des Exponentials gewinnt man daraus die folgende, nicht mehr von n abhängige, obere Schranke (für $h \in]0, \delta]$):

$$\sup_{0 \leq n \leq N_k^k} h^{l-1} \|f_n^k\|_\infty \leq \frac{M}{1-C_k} [(1+C'_k) \|f_0^k\|_\infty + \\ (6.10) \quad + k^{m+p-1} b_{p,m} M \cdot \|u^{(p+m)}\|_{L^\infty(\bar{\Omega})}] \cdot \exp(k^{m-1} \frac{M L \beta}{1-C_k}).$$

Wegen (6.6), (6.9), $m+p-1 \geq 1$ sowie $m-l \geq 0$ entnimmt man der Normabschätzung (6.10) unmittelbar, daß die Relation $\lim_{k \rightarrow 0} \|f_n^k\|_\infty = 0$ stets wie behauptet $\lim_{k \rightarrow 0} \sup_{0 \leq n \leq N_k^k} h^{l-1} \|f_n^k\|_\infty = 0$ zur Folge hat. -

Als Anwendungsbeispiel leiten wir noch eine hinreichende Bedingung her für 1-Konvergenz bei einem im Sinne von G. DAHLQUIST stabilen linearen Diskretisierungsalgorithmus der Schrittzahl $k \geq 2$ für das komplexe Anfangswertproblem (AWP₂). Von den mit Hilfe der Startroutine zur Schrittweite $h > 0$ zu bestimmenden Ausgangswerten $u_n^h \in \mathbb{C}$, ($0 \leq n \leq k-1$), fordern wir, daß diese die Bedingungen $u_0^h = \xi_0$ für jedes $h > 0$ und $\lim_{h \rightarrow 0+} \frac{u_n^h - \xi_n}{nh} = \xi_1$, für $1 \leq n \leq k-1$ erfüllen mögen. Weil für die zur exakten Lösungsfunktion u gebildeten Differenzenquotienten sicher $\lim_{h \rightarrow 0+} \frac{u(t_n) - u(t_0)}{t_n - t_0} = u'(t_0) = \xi_0$ gilt, schließt man auf $\lim_{h \rightarrow 0+} h^{-1} \|f_0\|_\infty = 0$. Aus der Abschätzung (6.10) erhält man demnach, falls man beachtet, daß aufgrund des Korollars zu Satz 5-3 $l = m = 2$ zu setzen ist, zusammenfassend das folgende

Korollar: Bei auf $\bar{\Omega}$ dreimal stetig differenzierbar vorausgesetzter Lösungsfunktion u des komplexen Anfangswertproblems (AWP₂) zweiter Ordnung ist jeder im Sinne von G. DAHLQUIST stabile lineare Diskretisierungsalgorithmus vom Approximationsgrad ≥ 1 , ausgehend von den Startwerten u_n^h , ($0 \leq n \leq k-1$), welche die Bedingungen $u_0^h = \xi_0$ für jedes $h > 0$ und $\lim_{h \rightarrow 0+} \frac{u_n^h - \xi_n}{nh} = \xi_1$, für $1 \leq n \leq k-1$ erfüllen, bereits 1-konvergent.

Für Untersuchungen über die Konvergenz von höheren Differenzenquotienten der Näherungslösung gegen die entsprechenden Ableitungen der exakten Lösung u von (AWP_m) hinsichtlich geeignet gewählter Normtopologien unter wesentlicher Benutzung von Hilfsmitteln aus der elementaren nichtlinearen Funktionalanalysis sei auf B. DEJON [11] verwiesen.

6.5. Für die Normabschätzung (6.10) der Diskretisierungsfehler-Vektoren $\{f_n^k\} \in E$, $(0 \leq n \leq N_k^k)$, bei hinreichend klein gewählter Schrittweite $h > 0$ haben wir über die Differentialgleichung $u^{(m)} = f(t, u)$ in (AWP_m) selbst, außer gewissen Differenzierbarkeitseigenschaften der Lösungsfunktion u auf $\bar{\Omega}$, lediglich die Existenz einer globalen LIPSCHITZ-Konstante $L > 0$ für die stetige komplexwertige Funktion f vorausgesetzt. Um nun aber für lineare Diskretisierungsalgorithmen wirklich realistische Fehlerabschätzungen erzielen zu können, wird man die in der Praxis in den meisten Fällen vorliegenden weitergehenden Informationen über die Funktion f , wie etwa die Existenz partieller Ableitungen und Schranken für diese auf geeigneten kompakten Teilintervallen von Ω heranziehen. Zielsetzungen dieser Art sind für die praktische Behandlung von Anfangs-

wertproblemen gewöhnlicher Differentialgleichungen von großer Bedeutung, sie liegen jedoch außerhalb des Rahmens einer allgemeinen funktionalanalytischen Theorie.

Literaturverzeichnis

BOURBAKI, N.:

- [1] Théorie des ensembles, Fascicule de résultats,
3^e éd. Paris: Hermann 1958.
- [2] Algèbre, chap. II, 3^e éd. Paris: Hermann 1962.
- [3] Topologie générale, chap. I - II, 3^e éd.
Paris: Hermann 1961.
- [4] Espaces vectoriels topologiques, chap. I - II,
2^e éd., chap. III - V. Paris: Hermann 1966, 1964.
- [5] Intégration, chap. I - IV, chap. V, 2^e éd.
Paris: Hermann 1965, 1967.
- [6] Théorie spectrales, chap. I - II.
Paris: Hermann 1967.

CESCHINO, F., and J. KUNTZMANN:

- [7] Numerical solution of initial value problems.
Englewood Cliffs (New Jersey): Prentice-Hall 1966.

DAHLQUIST, G.:

- [8] Convergence and stability in the numerical
integration of ordinary differential equations.
Math. Scand. 4, 33 - 53 (1956).

DAHLQUIST, G.:

- [9] Stability and error bounds in the numerical integration of ordinary differential equations. Kungl. Tekniska Högskolans Handlingar, Stockholm, 130 (1959).
- [10] Stability questions for some numerical methods for ordinary differential equations. Proc. Sym. Appl. Math., Vol. XV, 147 - 158. AMS, Providence 1963.

DEJON, B.:

- [11] Stronger than uniform convergence of multistep difference methods. Numer. Math. 8, 29 - 41 (1966).

DOOB, J.L.:

- [12] Stochastic processes. New York: John Wiley & Sons 1953.

HENRICI, P.:

- [13] Discrete variable methods in ordinary differential equations. New York: John Wiley & Sons 1962.
- [14] Error propagation for difference methods. New York: John Wiley & Sons 1963.

HIRZEBRUCH, F.:

- [15] Neue topologische Methoden in der algebraischen Geometrie. 2. Aufl. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer 1962.

HULL, T.E., and W.A.J. LUXEMBURG:

- [16] Numerical methods and existence theorems for ordinary differential equations.
Numer. Math. 2, 30 - 41 (1960).

KATO, T.:

- [17] Estimation of iterated matrices, with application to the von NEUMANN condition. Numer. Math. 2, 22 - 29 (1960).

MILNE, W.E.:

- [18] Numerical solution of differential equations.
New York: John Wiley & Sons 1953.

OSTROWSKI, A.:

- [19] Über Normen von Matrizen. Math. Zeitschrift 63, 2 - 18 (1955).

QUADE, W.:

- [20] Numerische Integration von gewöhnlichen Differentialgleichungen durch Interpolation nach HERMITE.
ZAMM 37, 161 - 169 (1957).

REIMER, M.:

- [21] Stabilität bei numerischer Integration von Differentialgleichungen. Diss. Tübingen 1963.
[22] Optimale Verfahren zur numerischen Integration von Anfangswertproblemen. Math. Zeitschrift 84, 70 - 79 (1964).

REIMER, M.:

- [23] Zur Theorie der linearen Differenzenformeln.
Math. Zeitschrift 95, 373 - 402 (1967).

RISS, J.:

- [24] Éléments de calcul différentiel et théorie
des distributions sur les groupes abéliens
localement compacts. Acta math. 89, 45 - 105 (1953).

RUTISHAUSER, H.:

- [25] Über die Instabilität von Methoden zur Integration
gewöhnlicher Differentialgleichungen. ZAMP 3,
65 - 74 (1952).
[26] Bemerkungen zur numerischen Integration gewöhn-
licher Differentialgleichungen n-ter Ordnung.
Numer. Math. 2, 263 - 279 (1960).

SCHWARTZ, L.:

- [27] Théorie des distributions, 3^e éd.
Paris: Hermann 1966.

SERRE, J.-P.:

- [28] Faisceaux algébriques cohérents. Ann. Math. 61,
197 - 278 (1955).

SOBOLEV, S.L.:

- [29] Certain contemporary questions of computational
mathematics (Russ.). Uspeki Math. Nauk 10,
194 - 195 (1955).

STIEFEL, E.:

- [30] Einführung in die numerische Mathematik.
2. Aufl. Stuttgart: B.G. Teubner 1963.

TODD, J.:

- [31] Solution of differential equations by recurrence relations. Math. Tables Aids Comput. 4, 39 - 44 (1950).

WIDLUND, O.B.:

- [32] Stability of parabolic difference schemes in the maximum norm. Numer. Math. 8, 186 - 202 (1966).

Register einiger wichtiger Strukturen

(Nummern in Klammern sind Abschnittsverweise)

N additive Halbgruppe der natürlichen Zahlen $\mathbb{N} \cong 0$.

N^{*} multiplikative Halbgruppe der natürlichen Zahlen $\mathbb{N} \cong 1$.

Z Ring der ganzen rationalen Zahlen.

R topologischer Körper der reellen Zahlen.

R₊ abgeschlossene positive reelle Halbgerade.

C topologischer Körper der komplexen Zahlen.

$\mathcal{D}_{\mathbf{C}}(\Omega)$, $\mathcal{D}_{\mathbf{C}}^{\infty}(\Omega)$, $\mathcal{E}_{\mathbf{C}}(\Omega)$, $\mathcal{E}_{\mathbf{C}}^{\infty}(\Omega)$, $\mathcal{R}_{\mathbf{C}}^{\circ}(\Omega)$ Grund-
räume im Sinne der Distributionentheorie (1.1).

$\mathcal{D}'_{\mathbf{C}}(\Omega)$, $\mathcal{D}_{\mathbf{C}}^{\prime\infty}(\Omega)$, $\mathcal{E}'_{\mathbf{C}}(\Omega)$, $\mathcal{E}_{\mathbf{C}}^{\prime\infty}(\Omega)$ Vektorräume
komplexer Distributionen (1.2).

$\mathcal{D}_{t,x}^{\infty}(\Omega; \mathbf{C})$, $\mathcal{D}_{t,x}^{\prime\infty}(\Omega; \mathbf{C})$ Vektorräume komplexer
DAHLQUIST-Distributionen (3.4, 3.5).

$\mathcal{M}_{\mathbf{C}}(\Omega)$, $\mathcal{M}_{\mathbf{C}}^{\dagger}(\Omega)$, $\mathcal{M}_{\mathbf{C}}^{\varepsilon}(\Omega)$ Vektorräume komplexer
RADON-Maße (1.2).

$L^1_{loc}(\Omega, \mu; \mathbb{C})$, $L^1_c(\Omega, \mu)$, $L^\infty_c(\Omega, \mu)$ Integrationsräume.

$\mathcal{P}_n(\Omega; \mathbb{C})$ Vektorraum komplexwertiger Polynomfunktionen des Grades $\leq n$.

$\mathbb{C}[X]$ Algebra der Polynome in der Unbestimmten X mit komplexen Koeffizienten.

$M_{n \times n}(\mathbb{C})$ Algebra der komplexen n -reihigen quadratischen Matrizen.

$\mathcal{L}_c(E)$ Algebra der normstetigen Endomorphismen des BANACH-Raumes E .

$\mathcal{D}'_c(\Omega)$ Garbe der Keime von komplexen Distributionen.

VS Kategorie der $\mathbb{C}$ -Vektorräume.

LCTVS Kategorie der lokalkonvexen topologischen $\mathbb{C}$ -Vektorräume.

Lebenslauf

Am 14. März 1938 wurde ich, Walter Schempp, als Sohn des Glasermeisters Albert Schempp und seiner Frau Julie geb. Keppler in Tübingen geboren. Von 1945 bis 1949 besuchte ich in Pfullingen (Württemberg) die Grundschule, anschließend das dortige Progymnasium und legte im Frühjahr 1958 am Johannes-Kepler-Gymnasium Reutlingen die Reifeprüfung ab. Vom Sommer-Semester 1958 an studierte ich an der Eberhard-Karls-Universität Tübingen Mathematik und Physik und bestand im Februar 1962 die Diplom-Vorprüfung. Die Diplomarbeit über "Fixpunktmethoden in der Analysis" fertigte ich bei Herrn Prof. Dr. K. Zeller an und legte die Diplom-Hauptprüfung im Juli 1965 ab. Anschließend war ich als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Mathematischen Institut in Tübingen und am Deutschen Rechenzentrum in Darmstadt angestellt. Seit 1. Januar 1967 arbeite ich am Rechenzentrum der Ruhr-Universität Bochum, vom 1. August 1967 an als Verwalter einer wissenschaftlichen Assistentenstelle. Während dieser Tätigkeit entstand unter der Leitung von Herrn Prof. Dr. H. Ehlich die vorliegende Dissertation.

Meine wissenschaftliche Ausbildung verdanke ich den Herren Professoren W. Braunbek, H. Ehlich, B. Huppert, H. Kneser, H. Krüger, M. Müller, G. Pickert, W. Stoll, H. G. Tillmann, W. Vogel, H. Wielandt und K. Zeller.

BAMBERGER FOTODRUCK · RUDOLF RODENBUSCH
8600 BAMBERG - Markusplatz 22 - Tel.: 0951/6 27 94